Н. А. Булгаков

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ

ШКОЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
ФИЗИКА

СПРАВОЧНИК

• **ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ** •

Министерство образования Российской Федерации

Тамбовский государственный технический университет

Н. А. Булгаков

ОСНОВНЫЕ

ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ
ПО МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ

ШКОЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
Ф И З И К А

СПРАВОЧНИК

Тамбов
• Издательство ТГТУ •
2002

УДК 531(075)
ББК В3я73
Б90

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор технических наук, профессор
кафедры "Приемные и передающие радиоустройства" ТВАИИ,
заслуженный работник высшей школы РФ
Д. Д. Дмитриев

Кандидат технических наук, профессор кафедры "Физика" ТВАИИ
В. С. Макаров

Булгаков Н. А.
Б90 Основные законы и формулы по математике и физике: Справочник. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2002. 72 с.

Представлены в сжатой форме основные законы и формулы по всему курсу физики, а также по школьной и высшей математике, знание которых необходимо для решения задач и осмысления физической сущности явлений.

Основное назначение — помочь быстро найти или восстановить в памяти необходимые законы и формулы. Используется современная терминология и обозначения.

Привлекателен в качестве справочного материала при подготовке к семинарским занятиям и экзаменам. Помимо студентов вузов может быть полезен инженерно-техническим работникам и учащимся колледжей и школ.

УДК 531(075)
ББК В3я73

Справочное издание

БУЛГАКОВ Николай Александрович

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ

ШКОЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
ФИЗИКА

Редактор З. Г. Чернова

Инженер по компьютерному макетированию М. Н. Рыжкова

ЛР № 020851 от 27.09.99
$\Pi_{\text{лр}}$ № 020079 от 28.04.97

Подписано в печать 02.03.2002.
Гарнитура Times ET. Формат 60 × 84 / 16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Объем: 4,2 усл. печ. л.; 4,5 уч.-изд. л.
Тираж 500 экз. С. 151[M]

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ШКОЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

- Числовые неравенства:
  - Если $a > b$, то $b < a$.
  - Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.
  - Если $a > b$, то $a + c > b + c$.
  - Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$.
  - Если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$.
  - Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.
  - Если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, причем $a > b$ и $c > d$, то $ac > bd$.
  - Если $a > b > 0$ и n — натуральное число, то $a^n > b^n$.
- Разложение на множители:

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$; $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$;

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$; $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$;

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,

где x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

- Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$:

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ — формула корней квадратного уравнения.

Теорема Виета: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$.

- Арифметическая прогрессия:

$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — члены арифметической прогрессии;

d — разность арифметической прогрессии;

$a_{n+1} = a_n + d$ — определение арифметической прогрессии;

$a_n = a_1 + d(n - 1)$ — формула *n*-го члена;

$a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ — характеристическое свойство;

$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$ — формула суммы *n* первых членов.

- Геометрическая прогрессия:

$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — члены геометрической прогрессии;

q — знаменатель геометрической прогрессии;

$b_{n+1} = bq, \quad b \neq 0,\ q \neq 0$ — определение геометрической прогрессии;

$b_n = b_1 q^{n-1}$ — формула n-го члена;

$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}$ — характеристическое свойство;

$S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q-1} = \dfrac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$ — формула суммы n первых членов;

$S = \dfrac{b_1}{1-q}$ — формула суммы бесконечной геометрической прогрессии при $|q| < 1$.

ТРИГОНОМЕТРИЯ

- Свойства тригонометрических функций:

$$\sin(-x) = -\sin x; \qquad \sin(x + 2\pi k) = \sin x;$$
$$\cos(-x) = \cos x; \qquad \cos(x + 2\pi k) = \cos x;$$
$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x; \qquad \operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg} x;$$
$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x; \qquad \operatorname{ctg}(x + \pi k) = \operatorname{ctg} x,$$

где k — любое целое число.

- Таблица значений тригонометрических функций некоторых углов

Функция	Аргумент α						
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0

Примечание. Связь между градусной и радианной мерами измерении угла:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\ \text{рад.}$$

- Формулы, связывающие тригонометрические функции одного и того же аргумента:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$
$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

- Формулы двойного угла:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha};$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha};$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}; \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}.$$

- Формулы тройного угла:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha; \quad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

- Формулы понижения степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}; \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

- Формулы сложения и вычитания аргументов:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

- Формулы сложения и вычитания тригонометрических функций:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha \mp \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

- Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму и разность:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right);$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right);$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right).$$

- Знаки тригонометрических функций по четвертям

Функция	Четверть			
	I	II	III	IV
sin	+	+	–	–
cos	+	–	–	+

tg	+	–	+	–
ctg	+	–	+	–

- Формулы приведения

Функция	Аргумент t						
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin t$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos t$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\, t$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\, t$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$

- Решение простейших тригонометрических уравнений:

$$\sin x = a,\ |a| \le 1,\quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n;$$

$$\cos x = a,\ |a| \le 1,\quad x = \pm \arccos a + 2\pi n;$$

$$\mathrm{tg}\, x = a,\quad x = \mathrm{arctg}\, a + \pi n;$$

$$\mathrm{ctg}\, x = a,\quad x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi n,$$ n — целое число.

- Обратные тригонометрические функции:

$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2},\quad 0 \le \arccos x \le \pi;$$
$$-\frac{\pi}{2} < \mathrm{arctg}\, x < \frac{\pi}{2},\quad 0 < \mathrm{arcctg}\, x < \pi;$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x;\quad \arccos(-x) = \pi - \arccos x;$$

$$\mathrm{arctg}\,(-x) = -\mathrm{arctg}\, x;\quad \mathrm{arcctg}\,(-x) = \pi - \mathrm{arcctg}\, x.$$

МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ТРЕУГОЛЬНИКАХ

Обозначения: a, b, c — длины сторон ΔABC, h — высота, $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр, S — площадь, R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей.

- Теорема синусов. В любом треугольнике

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

- Теорема косинусов. В любом треугольнике

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha .$$

- Формулы площади любого треугольника:

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}, \quad S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma, \quad S = pr, \quad S = \frac{abc}{4R},$$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ — формула Герона.

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

- $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ — расстояние между точками $M_1(x_1\,;\,y_1)$ и $M_2(x_2\,;\,y_2)$.

- $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ — координаты точки, делящей отрезок с концами $M_1(x_1\,;\,y_1)$ и $M_2(x_2\,;\,y_2)$ в отношении $\lambda = |M_1M| : |MM_2|$.

- $Ax + By + C = 0$ — общее уравнение прямой (A, B, C — любые вещественные числа, $A^2 + B^2 \neq 0$).

- $y = kx + b$ — уравнение прямой с угловым коэффициентом k (b — величина отрезка, отсекаемого прямой по оси Oy).

- $y - y_1 = k(x - x_1)$ — уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $M_1(x_1\,;\,y_1)$.

- $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ — уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1\,;\,y_1)$ и $M_2(x_2\,;\,y_2)$.

- $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ — уравнение прямой в отрезках (a, b — величины отрезков, отсекаемых прямой на осях Ox и Oy).

- $d = \frac{|Ax_0 + Bx_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ — расстояние от точки $M_0(x_0\,;\,y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$.

- $\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$ — формула вычисления одного из углов между прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$.

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ — каноническое уравнение эллипса (a, b — полуоси).

- $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — каноническое уравнение гиперболы.
- $y^2 = 2px$, $y^2 = -2px$ — каноническое уравнение параболы с осью симметрии Ox ($p > 0$ — параметр).

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

- $X = x_2 - x_1$, $Y = y_2 - y_1$, $Z = z_2 - z_1$ — выражение координат вектора $\overline{AB}$ через координаты точек $A(x_1 ; y_1 ; z_1)$ и $B(x_2 ; y_2 ; z_2)$.

- $|\,\bar{a}\,| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ — выражение длины вектора $\bar{a} = \{X ; Y ; Z\}$ через его координаты.

- $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)}$ — расстояние между точками $M_1(x_1 ; y_1 ; z_1)$ и $M_2(x_2 ; y_2 ; z_2)$.

- $\bar{a} \cdot \bar{b} = \left|\bar{a}\right| \cdot \left|\bar{b}\right| \cdot \cos\varphi$ — определение скалярного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (φ — угол между векторами).

- $\bar{a} \cdot \bar{b} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$ — выражение скалярного произведения векторов $\bar{a} = \{X_1 ; Y_1 ; Z_1\}$ и $\bar{b} = \{X_2 ; Y_2 ; Z_2\}$ через их координаты.

- $\cos\varphi = \dfrac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}$ — выражение угла между векторами.

- $Ax + By + Cz + D = 0$ — общее уравнение плоскости (A, B, C — любые вещественные числа, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$).

- $d = \dfrac{|\,Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\,|}{A^2 + B^2 + C^2}$ — расстояние от точки $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

- $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ — каноническое уравнение прямой с направляющим вектором $\bar{a} = \{l ; m ; n\}$, проходящей через точку $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$.

- $x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$, $z = z_0 + nt$ — параметрические уравнения прямой.

- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ — каноническое уравнение эллипсоида (a, b, c — полуоси).

- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ — каноническое уравнение однополосного гиперболоида.
- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ — каноническое уравнение двуполосного гиперболоида.
- $\dfrac{x^2}{2p} + \dfrac{y^2}{2q} = z$ — каноническое уравнение эллиптического параболоида ($p>0$, $q>0$ — параметры).

- $\dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{y^2}{2q} = z$ — каноническое уравнение гиперболического параболоида.

- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ — каноническое уравнение конуса второго порядка

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

□ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ — первый замечательный предел.

□ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ — второй замечательный предел.

□ $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ — определение производной функции $y=f(x)$ в точке x_0.

□ $\mathrm{d}y=f'(x_0)\mathrm{d}x$ — дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0.

□ Производные простейших элементарных функций:

- Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного

$$1)\ (u\pm v)'=u'\pm v';\quad 2)\ (uv)'=u'v+uv';\quad 3)\ \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2},\ \ v\neq 0.$$

- Производная постоянной функции

$$y=f(x)=C\quad\Rightarrow\quad y'=0,$$

$$(Cu)'=Cu'.$$

- Производная степенной функции

$$(x^n)'=nx^{n-1};\qquad (\sqrt{x})'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}};\qquad \left(\frac{1}{x}\right)'=(x^{-1})'=-\frac{1}{x^2}.$$

- Производная показательной функции

$$(a^x)'=a^x\ln a;\qquad (e^x)'=e^x.$$

- Производная логарифмической функции

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a};\qquad (\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

□ Производные тригонометрических функций:

$(\sin x)'=\cos x$;	$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
$(\cos x)'=-\sin x$;	$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
$(\mathrm{tg}\,x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$;	$(\mathrm{arctg}\,x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$;
$(\mathrm{ctg}\,x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-\mathrm{cosec}^2 x$;	$(\mathrm{arcctg}\,x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

□ $y'(t_0)=f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0)$ — правило дифференцирования сложной функции $y=f[\varphi(t)]$ в точке t_0; здесь $x_0=\varphi(t_0)$.

□ $\varphi'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$ — правило дифференцирования обратной функции $x=\varphi(y)$ в точке $y_0=f(x_0)$.

- $(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \dfrac{n(n-1)}{1 \cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)}$ — формула Лейбница.

- $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ — формула Лагранжа; $c \in (a,\, b)$.

- $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ — формула Коши; $c \in (a,\, b)$.

- $f(x) = f(a) + \dfrac{f'(a)}{1!}(x - a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \ldots +$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$$ — формула Тейлора; $\xi \in (a,\, x)$.

- При $a = 0$ получаем формулу Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{(n)} + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{(n+1)} .$$

- Неопределенный и определенный интегралы

    - Табличные интегралы:

$\int x^{\alpha} \mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C \ (\alpha \neq -1);$	$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\lvert x \rvert + C;$
$\int a^x \mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \ (0 < a \neq 1);$	$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C;$
$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C;$	$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C;$
$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C;$	$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C;$
$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C;$	$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C;$
$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \mathrm{arctg}\, x + C;$	$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} \dfrac{x}{a} + C;$
$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left\lvert \dfrac{x - a}{x + a} \right\rvert + C \ (a \neq 0);$	$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2 - 1} = \dfrac{1}{2} \ln\left\lvert \dfrac{x - 1}{x + 1} \right\rvert + C;$
$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} \dfrac{x}{a} + C \ (a \neq 0);$	$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2 + 1} = \mathrm{arctg}\, x + C;$
$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm k}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm k} \right\rvert + C;$	$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right\rvert + C.$

    - $\int f(x)\mathrm{d}x\big|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$ — формула замены переменной в неопределенном интеграле.

♦ $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$ — формула замены переменной в определенном интеграле; $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

♦ $\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\mathrm{d}x$ — формула интегрирования по частям в неопределенном интеграле.

♦ $\int\limits_a^b u\,\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,\mathrm{d}u$ — формула интегрирования по частям в определенном интеграле.

□ $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$ — формула среднего значения; $c \in [a, b]$.

□ $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$ — формула Ньютона-Лейбница.

● $s = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ — площадь криволинейной трапеции

$$0 \le y \le f(x),\ a \le x \le b.$$

□ $s = \int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t$ — площадь криволинейной трапеции, верхняя граница которой задана параметрически: $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ \alpha \le t \le \beta$.

□ $s = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi$ — площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах: $\rho = \rho(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta$.

□ $L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$ — длина дуги кривой, заданной уравнением $y = f(x),\ a \le x \le b$.

□ $L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t$ — длина дуги кривой, заданной параметрически: $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ \alpha \le t \le \beta$.

□ $L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\,\mathrm{d}\varphi$ — длина дуги кривой, заданной в полярных координатах: $\rho = \rho(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta$.

□ $V = \pi\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$ — объем тела вращения вокруг оси *Ox* криволинейной трапеции $0 \le y \le f(x),\ a \le x \le b$.

□ $P = 2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$ — площадь поверхности вращения вокруг оси *Ox* криволинейной трапеции $0 \le y \le f(x),\ a \le x \le b$.

Ф И З И К А

I. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

1.1. ЭЛЕМЕНТЫ КИНЕМАТИКИ

- Средняя и мгновенная скорости материальной точки

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}, \quad \langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t};$$

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}, \quad v = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

где $\Delta\mathbf{r}$ — элементарное перемещение точки за промежуток времени Δt; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки; Δs — путь, пройденный точкой за промежуток времени Δt.

- Среднее и мгновенное ускорения материальной точки

$$\langle \mathbf{a} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}, \quad \mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}.$$

- Полное ускорение при криволинейном движении

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2},$$

где $a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ — тангенциальная составляющая ускорения; $a_n = \frac{v^2}{r}$ — нормальная составляющая ускорения (r — радиус кривизны траектории в данной точке).

- Путь и скорость для равнопеременного движения

$$s = v_0 t \pm \frac{at^2}{2};$$

$$v = v_0 \pm at,$$

где v_0 — начальная скорость.

- Угловая скорость

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}.$$

- Угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}.$$

- Угловая скорость для равномерного вращательного движения

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n,$$

где T — период вращения; n — частота вращения ($n = N/t$, где N — число оборотов, совершаемых телом за время t).

- Угол поворота и угловая скорость для равнопеременного вращательного движения

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2};$$

$$\omega = \omega_0 t \pm \varepsilon t,$$

где ω_0 — начальная угловая скорость.

- Связь между линейными и угловыми величинами

$$s = R\varphi; \quad v = R\omega; \quad a_\tau = R\varepsilon; \quad a_n = \omega^2 R\ ,$$

где R — расстояние от оси вращения.

1.2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

- Импульс (количество движения) материальной точки

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}\ .$$

- Второй закон Ньютона (основное уравнение динамики материальной точки)

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}\ .$$

- Это же уравнение в проекциях на касательную и нормаль к траектории точки

$$F_\tau = ma_\tau = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}; \quad F_n = ma_n = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R\ .$$

- Сила трения скольжения

$$F_{\text{тр}} = fN\ ,$$

где f — коэффициент трения скольжения; N — сила нормального давления.

- Сила трения качения

$$F_{\text{тр}} = f_{\text{к}} N / r\ ,$$

где f — коэффициент трения качения; r — радиус качающегося тела.

- Закон сохранения импульса для замкнутой системы

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i = \text{const}\ ,$$

где n — число материальных точек (или тел), входящих в систему.

- Координаты центра масс системы материальных точек:

$$x_C = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}; \quad y_C = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i}; \quad z_C = \frac{\Sigma m_i z_i}{\Sigma m_i}.$$

где m_i — масса *i*-й материальной точки; x_C, y_C, z_C — ее координаты.

- Уравнение движения тела переменной массы (уравнение Мещерского)

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{р}}\ ,$$

где реактивная сила $\mathbf{F}_{\text{р}} = -\mathbf{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ ($\mathbf{u}$ — скорость истечения газов из ракеты).

- Формула Циолковского для определения скорости ракеты

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} \ln\frac{m_0}{m}\ ,$$

где m_0 — начальная масса ракеты.

1.3. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

- Работа, совершаемая постоянной силой

$$dA = F_s ds = F ds \cos\alpha ,$$

где F_s — проекция силы на направление перемещения; α — угол между направлениями силы и перемещения.

- Работа, совершаемая переменной силой, на пути s

$$A = \int_s F_s ds = \int_s F \cos\alpha ds .$$

- Средняя мощность за промежуток времени Δt

$$\langle N \rangle = \Delta A / \Delta t .$$

- Мгновенная мощность

$$N = \frac{dA}{dt}, \text{ или } N = \mathbf{Fv} = F_s v = F v \cos\alpha .$$

$$\Pi = mgh,$$

где g — ускорение свободного падения.

- Сила упругости

$$F = -kx ,$$

где x — деформация; k — коэффициент упругости.

- Потенциальная энергия упругодеформированного тела

$$\Pi = kx^2 / 2 .$$

- Закон сохранения механической энергии (для консервативной системы)

$$T + \Pi = E = \text{const} .$$

- Коэффициент восстановления

$$\varepsilon = v'_n / v_n ,$$

где v'_n и v_n — соответственно нормальные составляющие относительной скорости тел после и до удара.

- Скорости двух тел массами m_1 и m_2 после абсолютно упругого центрального удара:

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} ;$$

$$v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)\, v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} ,$$

где v_1 и v_2 — скорости тел до удара.

- Скорость движения тел после абсолютно неупругого центрального удара

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} .$$

1.4. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

 Момент инерции материальной точки

$$J = mr^2,$$

где m — масса точки; r — расстояние до оси вращения.

 Момент инерции системы (тела)

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2,$$

где r_i — расстояние материальной точки массой m_i до оси вращения.

В случае непрерывного распределения масс $J = \int r^2 \mathrm{d}m$.

 Моменты инерции тел правильной геометрической формы (тела считаются однородными; m — масса тела):

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Полый тонкостенный ци-линдр радиусом R	Ось симметрии	mR^2
Сплошной цилиндр или диск радиусом R	Ось симметрии	$\frac{1}{2}mR^2$
Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$\frac{1}{12}ml^2$
Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец	$\frac{1}{3}ml^2$
Шар радиусом R	Ось проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$

 Теорема Штейнера

$$J = J_C + ma^2,$$

где J_C — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс; J — момент инерции относительно параллельной оси, отстоящей от первой на расстоянии a; m — масса тела.

 Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z,

$$T_{\text{вр.}} = J_z \omega^2 / 2,$$

где J_z — момент инерции тела относительно оси z; ω — его угловая скорость.

 Кинетическая энергия тела, катящегося по плоскости без скольжения,

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2,$$

где m — масса тела; v_C — скорость центра масс тела; J_C — момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс; ω — угловая скорость тела.

 Момент силы относительно неподвижной точки

$$\mathbf{M} = [\mathbf{rF}],$$

где **r** — радиус-вектор, проведенный из этой точки в точку приложения силы **F**.

 Модуль момента силы

$$M = Fl,$$

где lj — плечо силы (кратчайшее расстояние между линией действия силы и осью вращения).

 Работа при вращении тела

$$dA = M_z d\varphi,$$

где $d\varphi$ — угол поворота тела; M_z — момент силы относительно оси z.

 Момент импульса (момент количества движения) твердого тела относительно оси вращения

$$L_z = \sum m_i v_i r_i = J_z,$$

где r_i — расстояние от оси z до отдельной частицы тела; $m_i v_i$ — импульс этой частицы; J_z — момент инерции тела относительно оси z; ω — его угловая скорость.

 Уравнение (закон) динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}; \quad M_z = J_z \frac{d\,\omega}{dt} = J_z \varepsilon,$$

где ε — угловое ускорение; J_z — момент инерции тела относительно оси z.

 Закон сохранения момента импульса (момента количества движения) для замкнутой системы

$$\mathbf{L} = \text{const}.$$

 Напряжение при упругой деформации

$$\sigma = F/S,$$

где F — растягивающая (сжимающая) сила; S — площадь поперечного сечения.

 Относительное продольное растяжение (сжатие)

$$\varepsilon = \Delta l/l,$$

где Δll — изменение длины тела при растяжении (сжатии); l — длина тела до деформации.

 Относительное поперечное растяжение (сжатие)

$$\varepsilon' = \Delta d/d,$$

где Δd — изменение диаметра стержня при растяжении (сжатии); d — диаметр стержня.

 Связь между относительным поперечным сжатием (растяжением) ε' и относительным продольным растяжением (сжатием) ε

$$\varepsilon' = \mu\varepsilon,$$

 Закон Гука для продольного растяжения (сжатия)

$$\sigma = E\,\varepsilon,$$

где E — модуль Юнга.

□ Потенциальная энергия упругорастянутого (сжатого) стержня

$$\Pi = \int_0^{\Delta l} F\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{ES}{l}(\Delta l)^2 = \frac{E\varepsilon^2}{2}V,$$

где V — объем тела.

1.5. ТЯГОТЕНИЕ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

□ Третий закон Кеплера

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3},$$

где T_1 и T_2 — периоды обращения планет вокруг Солнца; R_1 и R_2 — большие полуоси их орбит.

□ Закон всемирного тяготения

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где F —сила всемирного тяготения (гравитационная сила) двух материальных точек массами m_1 и m_2, r — расстояние между точками; G — гравитационная постоянная.

□ Сила тяжести

$$P = mg,$$

где m — масса тела; g — ускорение свободного падения.

□ Напряженность поля тяготения

$$\mathbf{g} = \mathbf{F}/m,$$

где $\mathbf{F}$ — сила тяготения, действующая на материальную точку массой m, помещенную в данную точку поля.

□ Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух материальных точек массами m_1 и m_2, находящихся на расстоянии r друг от друга,

$$\Pi = -Gm_1 m_2/r.$$

□ Потенциал поля тяготения

$$\varphi = \Pi/m,$$

где П — потенциальная энергия материальной точки массой m, помещенной в данную точку поля.

□ Связь между потенциалом поля тяготения и его напряженностью

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы координатных осей.

□ Первая и вторая космические скорости

$$v_1 = \sqrt{gR_0}, \quad v_2 = \sqrt{2gR_0},$$

где R_0 — радиус Земли.

□ Основной закон динамики для неинерциальных систем отсчета

$$m\mathbf{a}' = m\mathbf{a} + \mathbf{F}_{\text{ин.}},$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}'$ — соответственно ускорение тела в инерциальной и неинерциальной системах отсчета, $\mathbf{F}_{\text{ин.}}$ —силы инерции.

 Силы инерции

$$\mathbf{F}_{\text{ин.}} = \mathbf{F}_{\text{и}} + \mathbf{F}_{\text{ц}} + \mathbf{F}_{\text{к}} ,$$

где $\mathbf{F}_{\text{и}}$, — силы инерции, проявляющиеся при поступательном движении системы отсчета с ускорением a_0: $F_{\text{и}} = -ma_0$; $F_{\text{,,ц}}$ — центробежные силы инерции (силы инерции, действующие во вращающейся системе отсчета на тела, удаленные от оси вращения на конечное расстояние R): $F_{\text{ц}}$,,$= -m\omega^2 R$; $F_{\text{к}}$ — кориолисова сила инерции (силы инерции, действующие на тело, движущееся со скоростью v' во вращающейся системе отсчета:

$$\mathbf{F}_{\text{к}} = 2m[\mathbf{v}'\omega].$$

1.6. ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТЕЙ

 Гидростатическое давление столба жидкости на глубине h

$$p = \rho g h ,$$

где p — плотность жидкости.

 Закон Архимеда

$$F_{\text{А}} = \rho g V ,$$

где $F_{\text{А}}$ — выталкивающая сила; V — объем вытесненной жидкости.

 Уравнение неразрывности

$$Sv = \text{const} ,$$

где S — площадь поперечного сечения трубки тока; v — скорость жидкости.

 Уравнение Бернулли для стационарного течения идеальной несжимаемой жидкости

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const} ,$$

где p — статическое давление жидкости для определенного сечения трубки тока; v — скорость жидкости для этого же сечения; $\rho v^2 / 2$ — динамическое давление жидкости для этого же сечения; h — высота, на которой расположено сечение; $\rho g h$ — гидростатическое давление.

Для трубки тока, расположенной горизонтально,

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const} .$$

 Формула Торричелли, позволяющая определить скорость истечения жидкости из малого отверстия в открытом широком сосуде,

$$v = \sqrt{2gh} ,$$

где h — глубина, на которой находится отверстие относительно уровня жидкости в сосуде.

 Сила внутреннего трения между слоями текущей жидкости

$$F = \eta \left| \frac{\Delta v}{\Delta x} \right| S ,$$

где η — динамическая вязкость жидкости; $\Delta v / \Delta x$ — градиент скорости; S — площадь соприкасающихся слоев.

 Число Рейнольдса, определяющее характер движения жидкости,

$$\mathrm{Re} = \rho < v > d / \eta ,$$

где ρ — плотность жидкости; $< v >$ — средняя по сечению трубы скорость жидкости; d — характерный линейный размер, например диаметр трубы.

 Формула Стокса, позволяющая определить силу сопротивления, действующую на медленно движущийся в вязкой среде шарик,

$$F = 6\pi\eta r v ,$$

где r — радиус шарика; v — его скорость.

 Формула Пуазейля, позволяющая определить объем жидкости.
протекающий за время t через капиллярную трубку длиной l,

$$V = \pi R^4 \Delta p t / (8\eta l) ,$$

где R — радиус трубки; Δp — разность давлений на концах трубки.

 Лобовое сопротивление

$$R_x = C_x \frac{\rho v^2}{2} S ,$$

где C_x — безразмерный коэффициент сопротивления; ρ — плотность среды; v — скорость движения тела; S — площадь наибольшего поперечного сечения тела.

 Подъемная сила

$$R_y = C_y \frac{\rho v^2}{2} S ,$$

где C_y — безразмерный коэффициент подъемной силы

1.7. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ (ЧАСТНОЙ) ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

 Преобразования Лоренца

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - vx / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} ,$$

где предполагается, что система отсчета K' движется со скоростью v в положительном направлении оси x системы отсчета K, причем оси x' и x совпадают, а оси y' и y, z' и z — параллельны; c — скорость распространения света в вакууме.

 Релятивистское замедление хода часов

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} ,$$

где τ — промежуток времени между двумя событиями, отсчитанный движущимися вместе с телом часами; τ' — промежуток времени между теми же событиями, отсчитанный покоящимися часами.

 Релятивистское (лоренцево) сокращение длины

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2 / c^2} ,$$

где l_0 — длина стержня, измеренная в системе отсчета, относительно которой стержень покоится (собственная длина); l — длина стержня, измеренная в системе отсчета, относительно которой он движется со скоростью v.

 Релятивистский закон сложения скоростей

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x / c^2}, \quad u'_y = \frac{u_y\sqrt{1 - v^2 / c^2}}{1 - vu_x / c^2}, \quad u'_z = \frac{u_z\sqrt{1 - v^2 / c^2}}{1 - vu_x / c^2},$$

где предполагается, что система отсчета K' движется со скоростью v в положительном направления оси x системы отсчета K, причем оси x' и x совпадают, оси y' и y, z' и z — параллельны.

 Интервал s_{12} между событиями (инвариантная величина)

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = \text{inv},$$

где t_{12} — промежуток времени между событиями 1 и 2; l_{12} — расстояние между точками, где произошли события.

 Масса релятивистской частицы и релятивистский импульс

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}},$$

где m_0 — масса покоя.

 Основной закон релятивистской динамики

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t},$$

где $\mathbf{p}$ — релятивистский импульс частицы.

 Полная и кинетическая энергии релятивистской частицы

$$E = mc^2 = m_0c^2 + T, \quad T = (m - m_0)c^2.$$

 Связь между энергией и импульсом релятивистской частицы

$$E^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2, \quad pc = \sqrt{T(T + 2m_0c^2)}.$$

 Энергия связи системы

$$E_{\text{св.}} = \sum_{i=1}^{n} m_{0i}c^2 - M_0c^2,$$

где m_{0i} — масса покоя i-й частицы в свободном состоянии; M_0 — масса покоя системы, состоящей из n частиц.

II. ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

2.1. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

 Закон Бойля-Мариотта

$$pV = \text{const при } T = \text{const}, \ m = \text{const},$$

где p — давление; V — объем; T — термодинамическая температура; m — масса газа.

- Закон Гей-Люссака

$$V = V_0(1 + \alpha t), \text{ или } V_1 / V_2 = T_1 / T_2 \text{ при } p = \text{const}, m = \text{const};$$
$$p = p_0(1 + \alpha t), \text{ или } p_1 / p_2 = T_1 / T_2 \text{ при } V = \text{const}, m = \text{const},$$

где t — температура по шкале Цельсия; V_0 и p_0 — соответственно объем и давление при 0 °С; коэффициент $\alpha = 1/273\ \text{К}^{-1}$; индексы 1 и 2 относятся к произвольным состояниям.

- Закон Дальтона для давления смеси n идеальных газов

$$p = \sum_{i=1}^{n} p_i ,$$

где p_i — парциальное давление i-го компонента смеси.

- Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона-Менде-леева)

$$pV_{\text{m}} = RT \text{ (для одного моля газа)},$$
$$pV = (m / M)RT \text{ (для произвольной массы газа)},$$

где V_{m} — молярный объем; R — молярная газовая постоянная; M — молярная масса газа; m — масса газа; $m/M = \nu$ — количество вещества.

- Зависимость давления газа от концентрации n молекул и температуры

$$p = nkT ,$$

где k — постоянная Больцмана ($k = R / N_{\text{A}}$, N_{A} — постоянная Авогадро).

- Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v_{\text{кв.}} \rangle^2 ,$$

или

$$pV = \frac{2}{3} N \left(\frac{m_0 \langle v_{\text{кв.}} \rangle^2}{2} \right) = \frac{2}{3} E ,$$

или

$$pV = \frac{1}{3} N m_0 \langle v_{\text{кв.}} \rangle^2 = \frac{1}{3} m \langle v_{\text{кв.}} \rangle^2 ,$$

где $\langle v_{\text{кв.}} \rangle$ — средняя квадратичная скорость молекул; E — суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа; n — концентрация молекул, m_0 — масса одной молекулы; $m = Nm_0$ — масса газа; N — число молекул в объеме газа V.

- Скорость молекул:

  - наиболее вероятная

$$v_{\text{в.}} = \sqrt{2RT / M} = \sqrt{2kT / m_0} ;$$

  - средняя квадратичная

$$\langle v_{\text{кв.}} \rangle = \sqrt{3RT / M} = \sqrt{3kT / m_0} ;$$

♦ средняя арифметическая

$$v = \sqrt{8RT/(\pi M)} = \sqrt{8kT/(\pi m_0)},$$

где m_0 — масса одной молекулы.

 Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы идеального газа

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{3}{2}kT.$$

 Закон Максвелла для распределения молекул идеального газа по скоростям

$$f(v) = \frac{\mathrm{d}N(v)}{N\mathrm{d}v} = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \mathrm{e}^{-m_0 v^2/(2kT)},$$

где функция $f(v)$ распределения молекул по скоростям определяет относительное число молекул $\mathrm{d}N(v)/N$ из общего числа N молекул, скорости которых лежат в интервале от v до $v + \mathrm{d}v$.

 Закон Максвелла для распределения молекул идеального газа по энергиям теплового движения

$$f(\varepsilon) = \frac{\mathrm{d}N(\varepsilon)}{N\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\varepsilon^{1/2}\mathrm{e}^{-\varepsilon/(kT)},$$

где функция $f(\varepsilon)$ распределения молекул по энергиям теплового движения определяет относительное число молекул $\mathrm{d}N(\varepsilon)/N$ из общего числа N молекул, которые имеют кинетические энергии $\varepsilon = m_0 v^2/2$, заключенные в интервале от ε до $\varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon$.

 Барометрическая формула

$$p_h = p_0 \mathrm{e}^{-Mg(h-h_0)/(RT)},$$

где p_h и p_0 — давление газа на высоте h и h_0.

 Распределение Больцмана во внешнем потенциальном поле

$$n = n_0 \mathrm{e}^{-Mgh/(RT)} = n_0 \mathrm{e}^{-m_0 gh/(kT)}, \text{ или } n = n_0 \mathrm{e}^{-\Pi/(kT)},$$

где n и n_0 — концентрация молекул на высоте h и $h = 0$; $\Pi = m_0 gh$ — потенциальная энергия молекулы в поле тяготения.

 Среднее число соударений, испытываемых молекулой газа за 1 с,

$$\langle z \rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n \langle v \rangle,$$

где d — эффективный диаметр молекулы; n — концентрация молекул; $\langle v \rangle$ — средняя арифметическая скорость молекул.

 Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle l \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle z \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}.$$

 Закон теплопроводности Фурье

$$Q = -\lambda \frac{dT}{dx} S t,$$

где Q — теплота, прошедшая посредством теплопроводности через площадь S за время t; dT/dx — градиент температуры; λ — теплопроводность:

$$\lambda = \frac{1}{3} c_V \rho \langle v \rangle \langle l \rangle,$$

где c_V — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; ρ — плотность газа; $\langle v \rangle$ — средняя арифметическая скорость теплового движения его молекул; $\langle l \rangle$ — средняя длина свободного пробега молекул.

 Закон диффузии Фика

$$M = -D \frac{d\rho}{dx} S t,$$

где M — масса вещества, переносимая посредством диффузии через площадь S за время t; $d\rho/dx$ — градиент плотности, D — диффузия:

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle.$$

 Закон Ньютона для внутреннего трения (вязкости)

$$F = -\eta \frac{dv}{dx} S,$$

где F — сила внутреннего трения между движущимися слоями площадью S; dv/dx — градиент скорости; η — динамическая вязкость:

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle.$$

2.2. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

 Средняя кинетическая энергия поступательного движения, приходящаяся на одну степень свободы молекулы,

$$\langle \varepsilon_1 \rangle = \frac{1}{2} kT.$$

 Средняя энергия молекулы

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

где i — сумма поступательных, вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы $\left(i = n_{\text{пост.}} + n_{\text{вращ.}} + 2n_{\text{колеб.}}\right)$.

 Внутренняя энергия идеального газа

$$U = \nu \frac{i}{2} RT = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT,$$

где ν — количество вещества, m — масса газа; M — молярная масса газа; R — молярная газовая постоянная.

 Первое начало термодинамики

$$Q = \Delta U + A,$$

где Q — количество теплоты, сообщенное системе или отданное ею; ΔU — изменение ее внутренней энергии; A — работа системы против внешних сил.

 Первое начало термодинамики для малого изменения системы

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

 Связь между молярной C_m „ и удельной c теплоемкостями газа

$$C_m = cM,$$

где M — молярная масса газа.

 Молярные теплоемкости газа при постоянном объеме и постоянном давлении

$$C_V = \frac{i}{2}R, \quad C_p = \frac{i+2}{2}R.$$

 Уравнение Майера

$$C_p = C_V + R.$$

 Изменение внутренней энергии идеального газа

$$\mathrm{d}U = \frac{m}{M}C_V\mathrm{d}T.$$

 Работа, совершаемая газом при изменении его объема,

$$\mathrm{d}A = p\mathrm{d}V.$$

 Полная работа при изменении объема газа

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V,$$

где V_1 и V_2 — соответственно начальный и конечный объемы газа.

 Работа газа:

- при изобарном процессе

$$A = p(V_2 - V_1), \text{ или } A = \frac{m}{M}R(T_2 - T_1);$$

- при изотермическом процессе

$$A = \frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1}, \text{ или } A = \frac{m}{M}RT\ln\frac{p_1}{p_2}.$$

 Уравнение адиабатического процесса (уравнение Пуассона)

$$pV^\gamma = \mathrm{const}, \quad TV^{\gamma-1} = \mathrm{const}, \quad T^\gamma p^{1-\gamma} = \mathrm{const},$$

где $\gamma = C_p / C_V = (i+2)/i$ — показатель адиабаты.

 Работа в случае адиабатического процесса

$$A = \frac{m}{M}C_V(T_1 - T_2),$$

или

$$A = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\frac{m}{M}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{p_1V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]$$

где T_1, T_2 и V_1, V_2 — соответственно начальные и конечные температура и объем газа.

 Термический коэффициент полезного действия для кругового процесса (цикла)

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1},$$

где Q_1 — количество теплоты, полученное системой; Q_2 — количество теплоты, отданное системой; A — работа, совершаемая за цикл.

 Термический коэффициент полезного действия цикла Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 — температура нагревателя; T_2 — температура холодильника.

 Изменение энтропии при равновесном переходе из состояния 1 в состояние 2

$$\Delta S_{i\to 2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dU + dA}{T}.$$

2.3. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ, ЖИДКОСТИ И ТВЕРДЫЕ ТЕЛА

 Уравнение состояния реальных газов (уравнение Ван-дер-Ваальса) для моля газа

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT,$$

где V_m ,, — молярный объем; a и b — постоянные Ван-дер-Ваальса, различные для разных газов.

 Уравнение Ван-дер-Ваальса для произвольной массы газа

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{\nu} - b\right) = RT, \text{ или } \left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = RT,$$

где $\nu = m/M$ — количество вещества.

 Внутреннее давление, обусловленное силами взаимодействия молекул,

$$p' = a / V_m^2.$$

 Связь критических параметров — объема, давления и температуры — с постоянными a и b Ван-дер-Ваальса

$$V_{к.} = 3b, \quad p_{к.} = a/(27b^2), \quad T_{к.} = 8a/(27Rb).$$

 Внутренняя энергия реального газа

$$U = \nu(C_V T - a/V_m),$$

где C_V — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме.

 Энтальпия системы

$$U_1 + p_1V_1 = U_2 + p_2V_2,$$

где индексы 1 и 2 соответствуют начальному и конечному состояниям системы.

 Поверхностное натяжение

$$\sigma = F/l, \text{ или } \sigma = \Delta E/\Delta S,$$

где F — сила поверхностного натяжения, действующая на контур l, ограничивающий поверхность жидкости; ΔE — поверхностная энергия, связанная с площадью ΔS поверхности пленки.

$$\Delta p = \sigma(1/R_1 + 1/R_2),$$

где R_1 и R_2 — радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости; радиус кривизны положителен, если центр кривизны находится внутри жидкости (выпуклый мениск), и отрицателен, если центр кривизны находится вне жидкости (вогнутый мениск). В случае сферической поверхности

$$\Delta p = 2\sigma/R.$$

 Высота подъема жидкости в капиллярной трубке

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r},$$

где θ — краевой угол; r — радиус капилляра; p — плотность жидкости; g — ускорение свободного падения.

 Закон Дюлонга и Пти

$$C_V = 3R,$$

где C_V — молярная (атомная) теплоемкость химически простых твердых тел.

 Уравнение Клапейрона-Клаузиуса, позволяющее определить изменение температуры фазового перехода в зависимости от изменения давления при равновесно протекающем процессе,

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T(V_2 - V_1)},$$

где L — теплота фазового перехода; $(V_2 - V_1)$ — изменение объема вещества при переходе его из первой фазы во вторую; T — температура перехода (процесс изотермический).

III. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

3.1. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

 Закон Кулона

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_1||Q_2|}{r^2},$$

где F — сила взаимодействия двух точечных зарядов Q_1 и Q_2 в вакууме; r — расстояние между зарядами; ε_0 — электрическая постоянная, равная $8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф / м.

 Напряженность и потенциал электростатического поля

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}/Q_0; \quad \varphi = \Pi/Q_0 \quad \text{или} \quad \varphi = A_\infty/Q_0,$$

где $\mathbf{F}$ — сила, действующая на точечный положительный заряд Q_0, помещенный в данную точку поля; П — потенциальная энергия заряда Q_0; A_∞ — работа перемещения заряда из данной точки поля за его пределы.

 Напряженность и потенциал электростатического поля точечного заряда на расстоянии от заряда

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}; \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r},$$

 Поток вектора напряженности через площадку

$$d\Phi_E = EdS = E_n dS$$

где $d\mathbf{S} = dS\mathbf{n}$ — вектор, модуль которого равен dS, а направление совпадает с нормалью $\mathbf{n}$ к площадке; E_n — составляющая вектора $\mathbf{E}$ по направлению нормали к площадке.

 Поток вектора напряженности через произвольную поверхность S

$$\Phi_E = \int_S \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_S E_n \mathrm{d}S.$$

□ Принцип суперпозиции (наложения) электростатических полей

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i; \quad \varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i,$$

где $\mathbf{E}_i$, φ_i — соответственно напряженность и потенциал поля, создаваемого зарядом.

□ Связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\varphi \quad \text{или} \quad \mathbf{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}\right),$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы координатных осей.

□ В случае поля, обладающего центральной или осевой симметрией,

$$E = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}.$$

□ Электрический момент диполя (дипольный момент)

$$\mathbf{p} = |Q|\mathbf{l},$$

где $\mathbf{l}$ — плечо диполя.

□ Линейная, поверхностная и объемная плотности зарядов

$$\tau = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}l}; \quad \sigma = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S}; \quad \rho = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V},$$

т.е. соответственно заряд, приходящийся на единицу длины, поверхности и объема.

□ Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_S E_n \mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} Q_i = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V,$$

где ε_0 — электрическая постоянная; $\sum_{i=1}^{n} Q_i$ — алгебраическая сумма зарядов, заключенных внутри замкнутой поверхности S; n — число зарядов; ρ — объемная плотность зарядов.

□ Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью

$$E = \sigma/(2\varepsilon_0)$$

□ Напряженность поля, создаваемого двумя бесконечными параллельными разноименно заряженными плоскостями

$$E = \sigma/\varepsilon_0$$

□ Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной сферической поверхностью радиусом R с общим зарядом Q на расстоянии r от центра сферы

$$E = 0 \text{ при } r < R \text{ (внутри сферы);}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \text{ при } r \geq R \text{ (вне сферы.}$$

□ Напряженность поля, создаваемого объемно заряженным шаром радиусом R с общим зарядом Q на расстоянии r от центра шара

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3} \text{ при } r \leq R \text{ (внутри шара);}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \text{ при } r \geq R \text{ (вне шара).}$$

□ Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженным бесконечным цилиндром радиусом R на расстоянии r от оси цилиндра,

$$E = 0 \text{ при } r < R \text{ (внутри цилиндра)};$$
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r} \text{ при } r \geq R \text{ (вне цилиндра)}.$$

 Циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль замкнутого контура
$$\oint_L \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_L E_l \mathrm{d}l = 0,$$
где E_l — проекция вектора **E** на направление элементарного перемещения d**l.** Интегрирование производится по любому замкнутому пути L.

 Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда Q_0 из точки 1 в точку 2
$$A_{12} = Q_0(\varphi_1 - \varphi_2), \text{ или } A_{12} = Q_0\int_1^2 \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{l} = Q_0\int_1^2 E_l \mathrm{d}l,$$
где E_l — проекция вектора **E** на направление элементарного перемещения d**l**.

 Поляризованность
$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i / V,$$
где V — объем диэлектрика; $\mathbf{p}_i$ — дипольный момент i-й молекулы.

 Связь между поляризованностью диэлектрика и напряженностью электростатического поля
$$\mathbf{P} = \chi\varepsilon_0\mathbf{E}.$$
где χ — диэлектрическая восприимчивость вещества.

 Связь диэлектрической проницаемости ε с диэлектрической восприимчивостью χ:
$$\varepsilon = 1 + \chi.$$
 Связь между напряженностью E поля в диэлектрике и напряженностью E_0 внешнего поля
$$E = E_0 - P/\varepsilon_0, \text{ или } E = E_0/\varepsilon.$$
 Связь между векторами электрического смещения и напряженностью электростатического поля
$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}.$$
 Связь между $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{P}$
$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}.$$
 Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике
$$\Phi_D = \oint_S \mathbf{D}\mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_S D_n \mathrm{d}S = \sum_{l=1}^{n} Q_i,$$
где $\sum_{l=1}^{n} Q_i$ — алгебраическая сумма заключенных внутри замкнутой поверхности S свободных электрических зарядов; D_n — составляющая вектора $\mathbf{D}$ по направлению нормали к площадке — вектор, модуль которого равен dS, а направление совпадает с нормалью **n** к площадке. Интегрирование ведется по всей поверхности.
 Напряженность электростатического поля у поверхности проводника
$$E = \sigma/(\varepsilon_0\varepsilon),$$
где σ — поверхностная плотность зарядов.

 Электроемкость уединенного проводника
$$C = Q/\varphi,$$
где Q — заряд, сообщенный проводнику; φ — потенциал проводника.

 Емкость плоского конденсатора
$$C = \varepsilon_0\varepsilon S/d,$$
где S — площадь каждой пластины конденсатора; d — расстояние между пластинами.

- Емкость цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln(r_2/r_1)},$$

где l — длина обкладок конденсатора; r_1, r_2 — радиусы полых коаксиальных цилиндров.

- Емкость сферического конденсатора

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1},$$

где r_1 и r_2 — радиусы концентрических сфер.

- Емкость системы конденсаторов при последовательном и параллельном соединении

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i} \text{ и } C = \sum_{i=1}^{n} C_i,$$

где C_i — емкость *i*-го конденсатора; *n* — число конденсаторов.

- Энергия уединенного заряженного проводника

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{Q\varphi}{2} = \frac{Q^2}{2C}.$$

- Энергия взаимодействия системы точечных зарядов

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i\varphi_i,$$

где φ_i — потенциал, создаваемый в той точке, где находится заряд Q_i всеми зарядами, кроме *i*-го.

- Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2} = \frac{Q\Delta\varphi}{2} = \frac{Q^2}{2C},$$

где Q — заряд конденсатора; C — его емкость; $\Delta\varphi$ — разность потенциалов между обкладками.

- Сила притяжения между двумя разноименно заряженными обкладками конденсатора

$$|F| = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2 S}{2}.$$

- Энергия электростатического поля плоского конденсатора

$$W = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}Sd = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S U^2}{2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}V,$$

где S — площадь одной пластины; U — разность потенциалов между пластинами; $V = Sd$ — объем конденсатора.

- Объемная плотность энергии

$$w = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2},$$

где D — электрическое смещение.

3.2. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

- Сила и плотность электрического тока

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}; \quad j = \frac{I}{S},$$

где S — площадь поперечного сечения проводника.

- Плотность тока в проводнике

$$\mathbf{j} = ne\langle\mathbf{v}\rangle,$$

где $\langle\mathbf{v}\rangle$ — скорость упорядоченного движения зарядов в проводнике; n — концентрация зарядов.

- Электродвижущая сила, действующая в цепи,

$$E = A/Q_0 \quad \text{или} \quad E = \oint \mathbf{E}_{\text{ст}} \mathrm{d}l,$$

где Q_0 – единичный положительный заряд; A – работа сторонних сил; $\mathbf{E}_{\text{ст}}$ — напряженность поля сторонних сил.

 Сопротивление R однородного линейного проводника, проводимость G проводника и удельная электрическая проводимость γ вещества проводника

$$R = \rho l/S; \quad G = 1/R; \quad \gamma = 1/\rho,$$

где ρ — удельное электрическое сопротивление; S — площадь поперечного сечения проводника; l — его длина.

 Сопротивление проводников при последовательном и параллельном соединении

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i \quad \text{и} \quad \frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i},$$

где R_i — сопротивление i-го проводника; n — число проводников.

 Зависимость удельного сопротивления ρ от температуры

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t),$$

где α — температурный коэффициент сопротивления.

 Закон Ома:

- для однородного участка цепи

$$I = U/R;$$

- для неоднородного участка цепи

$$I = (\varphi_1 - \varphi_2 + E_{12})/R;$$

- для замкнутой цепи

$$I = E/R,$$

где U — напряжение на участке цепи; R — сопротивление цепи (участка цепи); $(\varphi_1 - \varphi_2)$ — разность потенциалов на концах участка цепи; E_{12} — э.д.с. источников тока, входящих в участок; E — э.д.с. всех источников тока цепи.

 Закон Ома в дифференциальной форме

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E},$$

где $\mathbf{E}$ – напряженность электростатического поля.

 Работа тока за время t

$$A = IUt = I^2 Rt = \frac{U^2}{R} t.$$

 Мощность тока

$$P = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}.$$

 Закон Джоуля-Ленца

$$Q = I^2 Rt = IUt,$$

где Q – количество теплоты, выделяющееся в участке цепи за время t.

 Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме

$$w = jE = \gamma E^2,$$

где w — удельная тепловая мощность тока.

 Правило Кирхгофа

$$\sum_k I_k = 0; \quad \sum_i I_i R_i = \sum_k E_k.$$

3.3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ТОКИ В МЕТАЛЛАХ, В ВАКУУМЕ И ГАЗАХ

 Контактная разность потенциалов на границе двух металлов 1 и 2

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{A_1 - A_2}{e} + \frac{kT}{e}\ln\frac{n_1}{n_2},$$

где A_1, A_2 — работы выходов свободных электронов из металлов; k — постоянная Больцмана; n_1, n_2 — концентрации свободных электронов в металлах.

 Термоэлектродвижущая сила

$$E = \frac{k}{e}(T_1 - T_2)\ln\frac{n_1}{n_2},$$

где $(T_1 - T_2)$ — разность температур спаев.

 Формула Ричардсона-Дешмана

$$j_{\text{нас}} = CT^2 e^{-A/(kT)},$$

где $j_{\text{нас}}$ — плотность тока насыщения термоэлектронной эмиссии; C — постоянная, теоретически одинаковая для всех металлов; A — работа выхода электрона из металла.

3.4. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

 Механический момент, действующий на контур с током, помещенный в однородное магнитное поле,

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_{\text{m}}\mathbf{B}],$$

где $\mathbf{B}$ — магнитная индукция; $\mathbf{p}_{\text{m}}$ — магнитный момент контура с током:

$$\mathbf{p}_{\text{m}} = IS\mathbf{n},$$

где S — площадь контура с током; $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности контура.

 Связь магнитной индукции $\mathbf{B}$ и напряженности $\mathbf{H}$ магнитного поля

$$\mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H},$$

где μ_0 — магнитная постоянная; μ — магнитная проницаемость среды.

 Закон Био-Савара-Лапласа

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{I[\mathrm{d}\mathbf{l},\ \mathbf{r}]}{r^2},$$

где $\mathrm{d}\mathbf{B}$ — магнитная индукция поля, создаваемая элементом длины $\mathrm{d}\mathbf{l}$ проводника с током I; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный от $\mathrm{d}\mathbf{l}$ к точке, в которой определяется магнитная индукция.

 Модуль вектора $\mathrm{d}\mathbf{B}$

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l\sin\alpha}{r^2},$$

где α — угол между векторами $\mathrm{d}\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$.

 Принцип суперпозиции (наложения) магнитных полей

$$\mathbf{B} = \sum_i \mathbf{B}_i,$$

где $\mathbf{B}$ — магнитная индукция результирующего поля; $\mathbf{B}_i$ — магнитные индукции складываемых полей.

 Магнитная индукция поля, создаваемого бесконечно длинным прямым проводником с током

$$B = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2I}{R},$$

где R — расстояние от оси проводника.

 Магнитная индукция в центре кругового проводника с током

$$B = \mu_0\mu\frac{I}{2R},$$

где R — радиус кривизны проводника.

- Закон Ампера

$$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l}\,,\ \mathbf{B}],$$

где d**F** — сила, действующая на элемент длины d**l** проводника с током I, помещенный в магнитное поле с индукцией **B**.

- Модуль силы Ампера

$$dF = IBl\sin\alpha,$$

где α — угол между векторами d**l** и **B**.

- Сила взаимодействия двух прямых бесконечных прямолинейных параллельных проводников с токами I_1 и I_2

$$dF = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2I_1I_2}{R}dl,$$

где R — расстояние между проводниками; dl — отрезок проводника.

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{Q[\mathbf{v}\,\mathbf{r}]}{r^3},$$

где r — радиус-вектор, проведенный от заряда к точке наблюдения.

- Модуль магнитной индукции

$$B = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{Qv}{r^2}\sin\alpha,$$

где α — угол между векторами **v** и **r**.

- Сила Лоренца

$$\mathbf{F} = Q[\mathbf{v}\,\mathbf{B}],$$

где **F** — сила, действующая на заряд Q, движущийся в магнитном поле со скоростью **v**.

- Формула Лоренца

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E} + Q[\mathbf{v},\ \mathbf{B}],$$

где **F** — результирующая сила, действующая на движущийся заряд Q, если на него действует электрическое поле напряженностью **E** и магнитное поле индукцией **B**.

- Холловская поперечная разность потенциалов

$$\Delta\varphi = R\frac{IB}{d},$$

где B — магнитная индукция; I — сила тока; d — толщина пластинки; $R = 1/(en)$ — постоянная Холла (n — концентрация электронов).

- Закон полного тока для магнитного поля в вакууме (теорема о циркуляции вектора **B**)

$$\oint_L \mathbf{B}d\mathbf{l} = \oint_L B_i dl = \mu_0\sum_{k=1}^{n} I_k,$$

где μ_0 — магнитная постоянная; d**l** — вектор элементарной длины контура, направленной вдоль обхода контура; $B_i = B\cos\alpha$ — составляющая вектора **B** в направлении касательной контура L произвольной формы (с учетом выбранного направления обхода); угол между векторами **B** и $d\mathbf{l}$; $\sum_{k=1}^{n} I_k$ — алгебраическая сумма токов, охватываемых контуром.

- Магнитная индукция поля внутри соленоида (в вакууме), имеющего N витков,

$$B = \mu_0 NI/l,$$

где l — длина соленоида.

- Магнитная индукция поля внутри тороида (в вакууме)

$$B = \mu_0 NI / 2\pi r.$$

 Поток вектора магнитной индукции (магнитный поток) через площадку dS

$$d\Phi_B = \mathbf{B}d\mathbf{S} = B_n dS,$$

где d**S** = dS_n — вектор, модуль которого равен dS, а направление совпадает с нормалью n к площадке; B_n — проекция вектора **B** на направление нормали к площадке.

 Поток вектора магнитной индукции через произвольную поверхность S

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B}d\mathbf{S} = \int_S B_n dS.$$

 Потокосцепление (полный магнитный поток, сцепленный со всеми витками соленоида)

$$\Phi = \mu_0\mu \frac{N^2 I}{l} S,$$

где μ — магнитная проницаемость среды.

 Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

$$dA = I d\Phi,$$

где $d\Phi$ — магнитный поток, пересеченный движущимся проводником.

 Работа по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле

$$dA = I d\Phi',$$

где $d\Phi'$ — изменение магнитного потока, сцепленного с контуром.

3.5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

 Закон Фарадея

$$E_i = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где E_i — э.д.с. индукции.

 Э.д.с. индукции, возникающая в рамке площадью S при вращении рамки с угловой скоростью в однородном магнитном поле с индукцией B,

$$E_i = BS\omega \sin \omega t,$$

где ωt — мгновенное значение угла между вектором **B** и вектором нормали **n** к плоскости рамки.

 Магнитный поток, создаваемый током I в контуре с индуктивностью L,

$$\Phi = LI.$$

 Э.д.с. самоиндукции

$$E_s = -L\frac{dI}{dt},$$

где L — индуктивность контура.

 Индуктивность соленоида (тороида)

$$L = \mu_0\mu \frac{N^2 S}{l},$$

где N — число витков соленоида; l — его длина.

 Токи при размыкании и при замыкании цепи

$$I = I_0 e^{-t/\tau}; \; I = I_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right),$$

где $\tau = L/R$ — время релаксации (L — индуктивность; R — сопротивление).

- Э.д.с. взаимной индукции (э.д.с., индуцируемая изменением силы тока в соседнем контуре)

$$E = -L_{12}\frac{dI}{dt},$$

где L_{12} — взаимная индуктивность контуров.

- Взаимная индуктивность двух катушек (с числом витков N_1 и N_2, намотанных на общий тороидальный сердечник,

$$L_{12} = L_{21} = \mu_0\mu\frac{N_1N_2}{l}S,$$

где μ_0 — магнитная проницаемость сердечника; I — длина сердечника по средней линии; S — площадь сердечника.

- Коэффициент трансформации

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{I_1}{I_2},$$

где N, E, I — соответственно число витков, э.д.с. и сила тока в обмотках трансформатора.

- Энергия магнитного поля, создаваемого током в замкнутом контуре, по которому течет ток I,

$$W = LI^2/2.$$

- Объемная плотность энергии однородного магнитного поля длинного соленоида

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}.$$

3.6. МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА

- Связь орбитального магнитного $\mathbf{p}_m$ и орбитального механического $\mathbf{L}_e$ моментов электрона

$$\mathbf{p}_m = -g\mathbf{L}_e = -\frac{e}{2m}\mathbf{L}_e,$$

где $g = e/(2m)$ — гиромагнитное отношение орбитальных моментов.

- Намагниченность

$$\mathbf{J} = \mathbf{P}_m/V = \sum\mathbf{p}_a/V,$$

где $\mathbf{P}_m = \sum\mathbf{p}_a$ — магнитный момент магнетика, равный векторной сумме магнитных моментов отдельных молекул.

- Связь между намагниченностью и напряженностью магнитного поля

$$\mathbf{J} = \chi\mathbf{H},$$

где χ — магнитная восприимчивость вещества.

- Связь между векторами $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{J}$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{J}),$$

где μ_0 — магнитная постоянная.

- Связь между магнитной проницаемостью и магнитной восприимчивостью вещества

$$\mu = 1+\chi.$$

- Закон полного тока для магнитного поля в веществе (теорема о циркуляции вектора **B**)

$$\oint_L \mathbf{B}d\mathbf{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0(I + I'),$$

где d**l** — вектор элементарной длины контура, направленный вдоль обхода контура; B_l — составляющая вектора **B** в направлении касательной контура L произвольной формы; I и I' — соответственно алгебраические суммы макротоков (токов проводимости) и микротоков (молекулярных токов), охватываемых заданным контуром.

 Теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля

$$\oint_L \mathbf{H}\mathrm{d}\mathbf{l} = I,$$

где I — алгебраическая сумма токов проводимости, охватываемых контуром L.

3.7. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

 Плотность тока смещения

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t},$$

где **D** — электрическое смещение; $\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ — плотность тока смещения в вакууме; $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ — плотность тока поляризации.

 Полная система уравнений Максвелла:

- в интегральной форме

$$\oint_L \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\mathrm{d}\mathbf{S}; \qquad \oint_S \mathbf{D}\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_V \rho \mathrm{d}V;$$

$$\oint_L \mathbf{H}\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)\mathrm{d}\mathbf{S}; \qquad \oint_S \mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{S} = 0.$$

- в дифференциальной форме

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \qquad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho;$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \qquad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

где $\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}$; $\mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H}$; $\mathbf{j} = \gamma\mathbf{E}$ (ε_0 и μ_0 — соответственно электрическая и магнитная постоянные; (ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости; γ — удельная проводимость вещества).

IV. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

4.1. МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

 Уравнение гармонических колебаний

$$s = A\cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где s — смещение колеблющейся величины от положения равновесия; A — амплитуда колебаний; $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi\nu$ — круговая (циклическая) частота; $\nu = 1/T$ — частота; T — период колебаний; φ_0 — начальная фаза.

 Скорость и ускорение точки, совершающей гармонические колебания,

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 s.$$

 Кинетическая энергия колеблющейся точки массой m

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi).$$

 Потенциальная энергия

$$\Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

П о л н а я э н е р г и я

$$E = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}.$$

 Дифференциальное уравнение гармонических колебаний материальной точки массой m

$$m\ddot{x} = -kx, \text{ или } \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где k — коэффициент упругости $(k = \omega_0^2 m)$.

 Период колебаний пружинного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{m/k},$$

где m — масса пружинного маятника; k — жесткость пружины.

 Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{J/(mgl)} = 2\pi\sqrt{L/g},$$

где J — момент инерции маятника относительно оси колебаний; l — расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника; $L = J/(ml)$ — приведенная длина физического маятника; g — ускорение свободного падения.

 Период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{l/g},$$

где l — длина маятника.

 Формула Томсона, устанавливающая связь между периодом T собственных колебаний в контуре без активного сопротивления и индуктивностью L и емкостью контура C,

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

 Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний заряда в контуре и его решение:

$$\ddot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0; \quad Q = Q_m\cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где Q_m — амплитуда колебаний заряда; $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — собственная частота контура.

 Амплитуда A результирующего колебания, получающегося при сложении двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты,

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

где A_1 и A_2 —амплитуды складываемых колебаний; φ_1 и φ_2 — их начальные фазы.

 Начальная фаза результирующего колебания

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}.$$

 Период биений

$$T = 2\pi/\Delta\omega.$$

 Уравнение траектории движения точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях одинаковой частоты,

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{2xy}{AB}\cos\varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi.$$

где A и B — амплитуды складываемых колебаний; φ — разность фаз обоих колебаний.

 Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний линейной системы и его решение:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\delta\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0; \quad s = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi),$$

где s — колеблющаяся величина, описывающая физический процесс; δ — коэффициент затухания ($\delta = r/(2m)$ в случае механических колебаний и $\delta = R/(2L)$ в случае электромагнитных колебаний); ω_0 — циклическая частота свободных незатухающих колебаний той же колебательной системы; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ — частота затухающих колебаний; $A_0 e^{-\delta t}$ — амплитуда затухающих колебаний.

 Декремент затухания

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta T},$$

где $A(t)$ и $A(t+T)$ — амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующих моментам времени, отличающимся на период.

 Логарифмический декремент затухания

$$\Theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N},$$

где $\tau = 1/\delta$ — время релаксации; N — число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в е раз.

 Добротность колебательной системы

$$Q = \frac{\pi}{\Theta} = \frac{\omega_0}{2\delta}.$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\delta\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = x_0\cos\omega t; \quad s = A\cos(\omega t - \varphi),$$

где s — колеблющаяся величина, описывающая физический процесс ($x_0 = F_0/m$ в случае механических колебаний, $x_0 = U_m/L$ в случае электромагнитных колебаний);

$$A = \frac{x_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + 4\delta^2\omega^2}}; \quad \varphi = \mathrm{arctg}\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

 Резонансная частота и резонансная амплитуда

$$\omega_{\text{рез.}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}; \quad A_{\text{рез.}} = \frac{x_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

 Полное сопротивление Z цепи переменного тока, содержащей последовательно включенные резистор сопротивлением R, катушку индуктивностью L и конденсатор емкостью C, на концы которой подается переменное напряжение $U = U_m \cos\omega t$,

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(R_L - R_C\right)^2},$$

где $R_L = \omega L$ — реактивное индуктивное сопротивление; $R_C = 1/(\omega C)$ — реактивное емкостное сопротивление.

 Сдвиг фаз между напряжением и силой тока

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}.$$

 Действующие (эффективные) значения тока и напряжения

$$I = I_m/\sqrt{2}; \quad U = U_m/\sqrt{2},$$

 Средняя мощность, выделяемая в цепи переменного тока,

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_m U_m \cos\varphi,$$

где

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

4.2. УПРУГИЕ ВОЛНЫ

 Связь длины волны λ, периода T колебаний и частоты ν:

$$\lambda = vT; \quad v = \lambda\nu,$$

где v — скорость распространения колебаний в среде (фазовая скорость).
 Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x,

$$\xi(x, t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

где $\xi(x, t)$ — смещение точек среды с координатой x в момент времени t; A — амплитуда волны; ω — циклическая (круговая) частота; $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/(vT) = \omega/v$ — волновое число (λ — длина волны; v — фазовая скорость; T — период колебаний); φ_0 — начальная фаза колебаний.

 Связь между разностью фаз $\Delta\varphi$ и разностью хода Δ

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta}{\lambda}.$$

 Условия максимума и минимума амплитуды при интерференции волн

$$\Delta_{max} = \pm 2m\frac{\lambda}{2}; \quad \Delta_{min} = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2},$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$.

 Фазовая v и групповая u скорости, а также связь между ними

$$v = \frac{\omega}{k}; \quad u = \frac{d\omega}{dk}; \quad u = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}.$$

 Уравнение стоячей волны

$$\xi(x, t) = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cos\omega t = 2A\cos kx\cos\omega t$$

 Координаты пучностей и узлов

$$x_п = \pm m\frac{\lambda}{2}; \quad x_п = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots .$$

 Уровень интенсивности звука (Б)

$$L = \lg(I / I_0),$$

где I — интенсивность звука; I_0 — интенсивность звука на пороге слышимости (I_0 = 1 пВт/м^2).

 Скорость распространения звуковых вали в газах

$$v = \sqrt{\gamma RT / M},$$

где R — малярная газовая постоянная; M — молярная масса; $\gamma = C_p/C_V$ — отношение молярных теплоемкостей газа при постоянных давлении и объеме; T — термодинамическая температура.

 Эффект Доплера в акустике

$$\nu = \frac{(v \pm v_{пр.})\nu_0}{v \mp v_{ист.}},$$

где ν — частота звука, воспринимаемая движущимся приемником; ν_0 — частота звука, посылаемая источником; $v_{пр.}$ — скорость движения приемника; $v_{ист.}$ — скорость движения источника; v — скорость распространения звука. Верхний знак берется, если при движении источника или приемника происходит их сближение, нижний знак — в случае их взаимного удаления.

4.3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

 Фазовая скорость распространения электромагнитных волн в среде

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

где $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ — скорость распространения света в вакууме; ε_0 и μ_0 — соответственно электрическая и магнитная постоянные; ε и μ —соответственно электрическая и магнитная проницаемости среды.

 Связь между мгновенными значениями напряженностей электрического (E) и магнитного (H) полей электромагнитной волны

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}E = \sqrt{\mu_0\mu}H,$$

где E и H — соответственно мгновенные значения напряженностей электрического и магнитного полей волны.

 Уравнения плоской электромагнитной волны

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi); \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi),$$

где $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ — соответственно амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей волны; ω — круговая частота; $k = \omega/\upsilon$ — волновое число; φ — начальные фазы колебаний в точках с координатой $x = 0$.

 Объемная плотность энергии электромагнитного поля

$$w = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0\mu H^2}{2}.$$

$$\mathbf{S} = [\mathbf{EH}].$$

V. ОПТИКА. КВАНТОВАЯ ПРИРОДА ИЗЛУЧЕНИЯ

5.1. ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ И ЭЛЕКТРОННОЙ ОПТИКИ

 Законы отражения и преломления света

$$i_1' = i_1; \quad \sin i_1 / \sin i_2 = n_{21},$$

где i_1 — угол падения; i_1' — угол отражения; i_2 — угол преломления; $n_{21} = n_2 / n_1$ — относительный показатель преломления второй среды относительно первой; n_1 и n_2 — абсолютные показатели преломления первой и второй среды.

 Предельный угол полного отражения при распространении света из среды оптически более плотной в среду оптически менее плотную

$$\sin i_{\text{пр.}} = n_2 / n_1 = n_{21}.$$

 Преломление на сферической поверхности (для параксиальных лучей)

$$\frac{n_2}{b} - \frac{n_1}{a} = \frac{n_2 - n_1}{R},$$

где R — радиус сферической поверхности; n_1 и n_2 — показатели преломления сред по разные стороны сферической поверхности; a — расстояние от точки, лежащей на оптической оси сферической поверхности, до преломляющей поверхности; b — расстояние от поверхности до изображения. В формуле $R > 0$ — для выпуклой поверхности, $R < 0$ —для вогнутой.

 Формула сферического зеркала

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{R} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

где a и b — соответственно расстояния от полюса зеркала до предмета и изображения; f — фокусное расстояние зеркала; R — радиус кривизны зеркала.

 Оптическая сила тонкой линзы

$$\Phi = \frac{1}{f} = (N-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

где f — фокусное расстояние линзы: $N = n / n_1$ — относительный показатель преломления (n и n_1 — соответственно абсолютные показатели преломления линзы и окружающей среды); R_1 и R_2 — радиусы кривизны поверхностей ($R > 0$ для выпуклой поверхности; $R < 0$ для вогнутой); a и b — соответственно расстояния от оптического центра линзы до предмета и изображения.

- Сила излучения

$$I_e = \Phi_e / \omega,$$

где Φ_e — поток излучения источника; ω — телесный угол, в пределах которого это излучение распространяется.

- Полный световой поток, испускаемый изотропным точечным источником,

$$\Phi_0 = 4\pi I,$$

где I — сила света источника.

- Светимость поверхности

$$R = \Phi/S,$$

где Φ — световой поток, испускаемый поверхностью; S — площадь этой поверхности.

- Яркость B, светящейся поверхности в некотором направлении φ

$$B_\varphi = I / (S \cos\varphi),$$

где I — сила света; S — площадь поверхности; φ — угол между нормалью к элементу поверхности и направлением наблюдения.

- Освещенность E поверхности

$$E = \Phi / S,$$

где Φ — световой поток, падающий на поверхность; S — площадь этой поверхности.

- Связь светимости R и яркости B при условии, что яркость не зависит от направления,

$$R = \pi B.$$

5.2. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

- Скорость света в среде

$$v = c / n,$$

где c — скорость света в вакууме; n — абсолютный показатель преломления среды.

- Разность фаз двух когерентных волн

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}(L_2 - L_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta,$$

где $L = sn$ — оптическая длина пути (s — геометрическая длина пути световом волны в среде; n — показатель преломления этой среды); $\Delta = L_2 - L_1$ — оптическая разность хода двух световых волн; λ_0 — длина волны в вакууме.

- Условие интерференционных максимумов

$$\Delta = \pm m\lambda_0\,, \quad m = 0,\,1,\,2,\,\dots\,.$$

- Условие интерференционных минимумов

$$\Delta = \pm(2m+1)\frac{\lambda_0}{2}, \quad m = 0,\,1,\,2,\,\dots\,.$$

- Ширина интерференционной полосы

$$\Delta x = \frac{l}{d}\lambda_0\,,$$

где d — расстояние между двумя когерентными источниками, находящимися на расстоянии l от экрана, параллельного обоим источникам, при условии $l >> d$.

- Условия максимумов и минимумов при интерференции света, отраженного от верхней и нижней поверхностей тонкой плоскопараллельной пленки, находящейся в воздухе ($n_0 = 1$),

$$2dn\cos r \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0\,, \quad m = 0,\,1,\,2,\,\dots\,;$$
$$2dn\cos r \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} = (2m+1)\frac{\lambda_0}{2}, \quad m = 0,\,1,\,2,\,\dots\,,$$

где d — толщина пленки; n — ее показатель преломления; i — угол падения; r — угол преломления. В общем случае член $\pm\lambda_0/2$ обусловлен потерей полуволны при отражении света от границы раздела: если $n > n_0$, то необходимо употреблять знак плюс, если $n < n_0$ — знак минус.

- Радиусы светлых колец Ньютона в отраженном свете (или темных в проходящем свете)

$$r_m = \sqrt{(m - 1/2)\lambda_0 R}\,, \quad m = 1,\,2,\,3,\,\dots\,,$$

где m — номер кольца; R — радиус кривизны линзы.

$$r_m^* = \sqrt{m\lambda_0 R}\,, \quad m = 1,\,2,\,\dots\,.$$

- В случае "просветления оптики" интерферирующие лучи в отраженном свете гасят друг друга при условии

$$n = \sqrt{n_c}\,,$$

где n_c — показатель преломления стекла; n — показатель преломления пленки.

5.3. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

- Радиус внешней границы m-й зоны Френеля для сферической волны

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}m\lambda}\,,$$

где m — номер зоны Френеля; λ — длина волны, a и b — соответственно расстояния диафрагмы с круглым отверстием от точечного источника и от экрана, на котором дифракционная картина наблюдается.

- Условия дифракционных максимумов и минимумов от одной щели, на которую свет падает нормально:

$$a\sin\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}, \quad a\sin\varphi = \pm 2m\frac{\lambda}{2}, \quad m = 1,\,2,\,3,\dots,$$

где a — ширина щели; φ — угол дифракции; m — порядок спектра; λ — длина волны.

- Условия главных максимумов и дополнительных минимумов дифракционной решетки, на которую свет падает нормально:

$$d\sin\varphi = \pm 2m\frac{\lambda}{2}, \quad m = 0,\,1,\,2,\,\dots\,;$$

$$d\sin\varphi = \pm 2m'\frac{\lambda}{N}, \quad m' = 0, 1, 2, 3, \ldots, \text{ кроме } 0, N, 2N, \ldots,$$

где d — период дифракционной решетки; N — число штрихов решетки.

- Период дифракционной решетки

$$d = 1 / N_0,$$

где N_0 — число щелей, приходящихся на единицу длины решетки.

- Условие дифракционных максимумов от пространственной решетки (формула Вульфа-Брэггов)

$$2d\sin\vartheta = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

где d — расстояние между атомными плоскостями кристалла; ϑ — угол скольжения.

- Угловая дисперсия дифракционной решетки

$$D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi}.$$

- Наименьшее угловое расстояние между двумя светлыми точками, при котором изображения этих точек могут быть разрешены в фокальной плоскости объектива,

$$\varphi \geq 1{,}22\lambda / D.$$

где D — диаметр объектива; λ — длина волны света.

- Разрешающая способность дифракционной решетки

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN,$$

где λ, $(\lambda + \delta\lambda)$ — длины волн двух соседних спектральных линий, разрешаемых решеткой; m — порядок спектра; N — общее число штрихов решетки.

5.4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН С ВЕЩЕСТВОМ

- Связь угла φ отклонения лучей призмой и преломляющего угла A призмы

$$\varphi = A(n-1),$$

где n — показатель преломления призмы.

- Связь между показателем преломления и диэлектрической проницаемостью вещества

$$n = \sqrt{\varepsilon}.$$

- Уравнение вынужденных колебаний оптического электрона под действием электрической составляющей поля волны (простейшая задача дисперсии)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eE_0}{m}\cos\omega t,$$

где eE_0 — амплитудное значение силы, действующей на электрон со стороны поля волны; ω_0 — собственная частота колебаний электрона; ω — частота внешнего поля; m — масса электрона.

- Зависимость показателя преломления вещества n от частоты ω внешнего поля, согласно элементарной электронной теории дисперсии,

$$n^2 = 1 + \frac{n_{0i}}{\varepsilon_0}\sum\frac{e^2 / m}{\omega_{0i}^2 - \omega^2},$$

где ε_0 — электрическая постоянная; n_{0i} — концентрация электронов с собственной частотой ω_{0i}; m — масса электрона; e — заряд электрона.

- Закон ослабления света в веществе (закон Бугера)

$$I = I_0 e^{-\alpha x},$$

где I_0 и I — интенсивности плоской монохроматической световой волны соответственно на входе и выходе слоя поглощающего вещества толщиной x; α — коэффициент поглощения.

 Эффект Доплера для электромагнитных волн в вакууме

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}{1 + (v / c)\cos \vartheta},$$

где ν_0 и ν — соответственно частоты электромагнитного излучения, испускаемого источником и воспринимаемого приемником; v — скорость источника электромагнитного излучения относительно приемника; c — скорость света в вакууме; ϑ —угол между вектором скорости $\mathbf{v}$ и направлением наблюдения, измеряемый в системе отсчета, связанной с наблюдателем.

 Поперечный эффект Доплера для электромагнитных волн в вакууме $(\vartheta = \pi / 2)$

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - v^2 / c^2}\ .$$

 Эффект Вавилова-Черенкова

$$\cos \vartheta = c / (nv),$$

где ϑ — угол между направлением распространения излучения и вектором скорости частицы; n — показатель преломления среды.

5.5. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

 Степень поляризации света

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где $I_{\max}$,, и $I_{\min}$ — соответственно максимальная и минимальная интенсивности частично поляризованного света, пропускаемого анализатором.

 Закон Малюса

$$I = I_0 \cos^2 \alpha ,$$

где I — интенсивность плоскополяризованного света, прошедшего через анализатор; I_0 — интенсивность плоскополяризованного света, падающего на анализатор; α — угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора.

 Закон Брюстера

$$\operatorname{tg} i_{\text{B}} = n_{21} ,$$

где i_{B} — угол падения, при котором отраженный от диэлектрика луч является плоскополяризованным; n_{21} — относительный показатель преломления.

 Оптическая разность хода между обыкновенным и необыкновенным лучами на пути l в ячейке Керра

$$\Delta = l(n_{\text{o}} - n_{\text{e}}) = klE^2 ,$$

где n_{o}, n_{e} — показатели преломления соответственно обыкновенного и необыкновенного лучей в направлении, перпендикулярном оптической оси; E — напряженность электрического поля; k — постоянная.

 Оптическая разность хода для пластинки в четверть волны

$$\Delta = (n_{\text{o}} - n_{\text{e}})d = \pm(m + 1/4)\lambda_0, \quad m = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots ,$$

где знак плюс соответствует отрицательным кристаллам, минус — положительным; λ_0 — длина волны в вакууме.

 Угол поворота плоскости поляризации:

- для оптически активных кристаллов и чистых жидкостей

$$\varphi = \alpha d;$$

- для оптически активных растворов

$$\varphi = [\alpha]Cd,$$

где d — длина пути, пройденного светом в оптически активном веществе; $\alpha_0[\alpha]$ — удельное вращение; C — массовая концентрация оптически активного вещества в растворе.

5.6. КВАНТОВАЯ ПРИРОДА ИЗЛУЧЕНИЯ

 Закон Стефана-Больцмана

$$R_e = \sigma T^4,$$

где R_e — энергетическая светимость (излучательность) черного тела; σ — постоянная Стефана-Больцмана; T — термодинамическая температура.

 Связь энергетической светимости R_e и спектральной плотности энергетической светимости $r_{\nu,T}$ $(r_{\lambda,T})$ черного тела

$$R_e = \int_0^\infty r_{\nu,T}\mathrm{d}\nu = \int_0^\infty r_{\lambda,T}\mathrm{d}\lambda .$$

 Энергетическая светимость серого тела

$$R_T^c = A_T\,\sigma T^4,$$

где A_T — поглощательная способность серого тела.

 Закон смещения Вина

$$\lambda_{\max,,,,} = b/T,$$

где $\lambda_{\max,,,,}$ — длина волны, соответствующая максимальному значению спектральной плотности энергетической светимости черного тела; b — постоянная Вина.

 Зависимость максимальной спектральной плотности энергетической светимости черного тела от температуры

$$(r_{\lambda,T}) = CT^5,$$

где $C = 1,30 \cdot 10^{-5}$ Вт/(м$^3 \cdot$К^5).

 Формула Рэлея-Джинса для спектральной плотности энергетической светимости черного тела

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}kT,$$

где k — постоянная Планка.

 Энергия кванта

$$\varepsilon_0 = h\nu = hc/\lambda .$$

 Формула Планка

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}\frac{h\nu}{\mathrm{e}^{h\nu/(kT)} - 1},$$

$$r_{\lambda,T} = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{h\nu}{e^{hc/(kT\lambda)} - 1}.$$

 Связь радиационной $T_р$ и истинной T температур

$$T_р = \sqrt[4]{A_т}\, T,$$

где $A_т$ — поглощательная способность серого тела.

 Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта

$$\varepsilon = h\nu = A + T_{max},$$

где $\varepsilon = h\nu$ — энергия фотона, падающего на поверхность металла; A — работа выхода электрона из металла; $T_{max} = mv_{max}^2/2$,, — максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона.

 "Красная граница" фотоэффекта для данного металла

$$\nu_0 = A/h; \quad \lambda_0 = hc/A,$$

где λ_0 — максимальная длина волны излучения (ν_0 — соответственно минимальная частота), при которой фотоэффект еще возможен.

 Масса и импульс фотона

$$m_\gamma = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}; \quad p_\gamma = \frac{h\nu}{c},$$

где $h\nu$ — энергия фотона.

$$p = \frac{E_e}{c}(1+\rho) = w(1+\rho),$$

где $E_e = Nh\nu$ — облученность поверхности (энергия всех фотонов, падающих на единицу поверхности в единицу времени); ρ — коэффициент отражения; w — объемная плотность энергии излучения.

 Изменение длины волны рентгеновского излучения при комптоновском рассеянии

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\vartheta) = \frac{2h}{m_0 c}\sin^2\frac{\vartheta}{2} = 2\lambda_C \sin^2\frac{\vartheta}{2},$$

где λ и λ' — длины волн падающего и рассеянного излучения; m_0 — масса электрона; ϑ — угол рассеяния; $\lambda_C = h/(m_0 c)$ — комптоновская длина волны.

VI. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ АТОМОВ, МОЛЕКУЛ И ТВЕРДЫХ ТЕЛ

6.1. ТЕОРИЯ АТОМОВ ВОДОРОДА ПО БОРУ

 Обобщенная формула Бальмера, описывающая серии в спектре водорода,

$$\nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

где ν — частота спектральных линий в спектре атома водорода; R — постоянная Ридберга; m определяет серию (m = 1, 2, 3, ...); n определяет отдельные линии соответствующей серии ($n = m + 1$, m + 2, ...): m = 1 (серия Лаймана), m = 2 (серия Бальмера), m = 3 (серия Пашена), m = 4 (серия Брэкета), m = 5 (серия Пфунда), m = 6 (серия Хэмфри).

 Первый постулат Бора (постулат стационарных состояний)

$$m_e v r_n = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

где m_e — масса электрона; v — скорость электрона по n-й орбите радиусом r_n.

 Второй постулат Бора (правило частот)

$$h\nu = E_n - E_m\,,$$

где E_n и E_m — соответственно энергии стационарных состояний атома до и после излучения (поглощения).

□ Энергия электрона на n-й стационарной орбите

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\frac{Z^2 m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2}, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

где Z — порядковый номер элемента в системе Менделеева; ε_0 — электрическая постоянная.

6.2. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

□ Связь дебройлевской волны частицы с импульсом p

$$\lambda = h / p = h / (mv)\,,$$

где m — масса частицы; v — ее скорость.

□ Фазовая скорость свободно движущейся со скоростью v частицы массой m

$$v_{\text{фаз.}} = \omega / k = E / p = c^2 / v\,,$$

где $E = \hbar\omega$ — энергия частицы (ω — круговая частота); $p = \hbar k$ — импульс ($k = 2\pi / \lambda$ — волновое число).

□ Групповая скорость свободно движущейся частицы

$$u = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}\,.$$

□ Соотношения неопределенностей:

- для координаты и импульса частицы

$$\Delta x \Delta p_x \ge h\,,$$
$$\Delta y \Delta p_y \ge h\,,$$
$$\Delta z \Delta p_z \ge h\,,$$

где $\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z$ — неопределенности координат; $\Delta p_x,\ \Delta p_y,\ \Delta p_z$ — неопределенности соответствующих проекций импульса частицы на оси координат;

- для энергии и времени

$$\Delta E \Delta t \ge h\,,$$

где ΔE — неопределенность энергии данного квантового состояния; Δt — время пребывания системы в данном состоянии.

□ Вероятность нахождения частицы в объеме dV

$$\mathrm{d}W = \Psi\Psi\,\mathrm{d}V = |\ \Psi\ |^2\,\mathrm{d}V\,,$$

где $\Psi = \Psi(x,\ y,\ z,\ t)$ — волновая функция, описывающая состояние частицы; Ψ^* — функция, комплексно сопряженная с Ψ; $|\Psi|^2 = \Psi\Psi^*$ — квадрат модуля волновой функции;

- для стационарных состояний

$$\mathrm{d}W = \psi\psi\,\mathrm{d}V = |\ \psi\ |^2\,\mathrm{d}V,$$

где $\psi = \psi(x,\ y,\ z)$ — координатная (амплитудная) часть волновой функции.

□ Условие нормировки вероятностей

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\ \Psi\ |^2\,\mathrm{d}V = 1,$$

где интегрирование производится по всему бесконечному пространству, т.е. по координатам $x,\ y,\ z$ от $-\infty$ до $+\infty$.

- Вероятность обнаружения частицы в интервале от x_1 до x_2

$$W = \int_{x_1}^{x_2} |\,\psi(x)\,|^2\, \mathrm{d}x .$$

- Среднее значение физической величины L, характеризующей частицу, находящуюся в состоянии, описываемом волновой функцией Ψ,

$$\langle L \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} L\,|\,\Psi\,|^2\, \mathrm{d}V .$$

где $\Psi = \Psi(x,\ y,\ z,\ t)$ — волновая функция, описывающая состояние частицы; $\hbar = h/(2\pi)$; m — масса частицы; Δ — оператор Лапласа $\left(\Delta\Psi = \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right)$; $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица; $U = U(x,\ y,\ z,\ t)$ — потенциальная энергия частицы в силовом поле, в котором она движется.

- Уравнение Шредингера для стационарных состояний

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0,$$

где $\psi = \psi(x,\ y,\ z)$ — координатная часть волновой функции $\left(\Psi(x,\ y,\ z,\ t) = \psi(x,\ y,\ z)e^{-i(E/\hbar)t}\right)$; $U = U(x,\ y,\ z)$ — потенциальная энергия частицы; E — полная энергия частицы.

- Волновая функция, описывающая одномерное движение свободной частицы,

$$\Psi(x,\ t) = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et - p_x x)},$$

где A — амплитуда волн де Бройля; $p_x = k\hbar$ — импульс частицы; $E = \hbar\omega$ — энергия частицы.

- Собственные значения энергии E_n частицы, находящейся на n-м энергетическом уровне в одномерной прямоугольной "потенциальной яме" с бесконечно высокими "стенками",

$$E_n = n^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2},\quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

где l — ширина ямы.

- Собственная волновая функция, соответствующая вышеприведенному собственному значению энергии,

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x,\quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots .$$

- Коэффициент прозрачности D прямоугольного потенциального барьера конечной ширины l,

$$D = D_0 \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U - E)}\,l\right],$$

где D_0 — множитель, который можно приравнять единице; U — высота потенциального барьера; E — энергия частицы.

- Уравнение Шредингера для линейного гармонического осциллятора в квантовой механике

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}\right)\psi = 0,$$

где $m\omega_0^2 x^2/2 = U$ — потенциальная энергия осциллятора; ω_0 — собственная частота колебаний осциллятора; m — масса частицы.

- Собственные значения энергии гармонического осциллятора

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots .$$

 Энергия нулевых колебаний гармонического осциллятора

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 .$$

6.3. ЭЛЕМЕНТЫ СОВРЕМЕННОЙ ФИЗИКИ АТОМОВ И МОЛЕКУЛ

 Потенциальная энергия $U(r)$ взаимодействия электрона с ядром в водородоподобном атоме

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

где r — расстояние между электроном и ядром; Z — порядковый номер элемента; ε_0 — электрическая постоянная.

 Собственное значение энергии E_n электрона в водородоподобном атоме

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\frac{Z^2me^4}{8h^2\varepsilon_0^2}, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots .$$

 Энергия ионизации атома водорода

$$E_i = -E_1 = \frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2} .$$

 Момент импульса (механический орбитальный момент) электрона

$$L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)},$$

где l — орбитальное квантовое число, принимающее при заданном n следующие значения: $l = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$ (всего n значений).

 Проекция момента импульса на направление z внешнего магнитного поля

$$L_{lz} = \hbar m_l ,$$

где m_l — магнитное квантовое число, принимающее при заданном l следующие значения: $m_l = 0,\ \pm 1,\ \ldots,\ \pm l$ (всего $(2l + 1)$ значений).

 Правила отбора для орбитального и магнитного квантовых чисел

$$\Delta l = \pm 1 \ \text{ и } \ \Delta m_l = 0,\ \pm 1 .$$

 Нормированная волновая функция, отвечающая ls-состоянию (основному состоянию) электрона в атоме водорода,

$$\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-r/a},$$

где $a = 4\pi\varepsilon_0\hbar^2/(me^2)$ — величина, совпадающая с первым боровским радиусом.

 Вероятность обнаружить электрон в атоме водорода, находящемся в ls-состоянии, в интервале от r до $r + \mathrm{d}r$

$$\mathrm{d}W = |\ \psi_{100}\ |^2\,\mathrm{d}V = |\ \psi_{100}\ |^2\,4\pi r^2\mathrm{d}r .$$

 Спин (собственный механический момент импульса) электрона

$$L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)},$$

где s — спиновое квантовое число ($s = 1/2$).

 Проекция спина на направление z внешнего магнитного поля

$$L_{sz} = \hbar m_s,$$

где m_s —магнитное спиновое квантовое число ($m_s = \pm 1/2$).

 Принцип Паули

$$Z(n, l, m_l, m_s) = 0 \text{ или } 1,$$

где $Z(n, l, m_l, m_s)$ — число электронов, находящихся в квантовом состоянии, описываемом набором четырех квантовых чисел: n — главного, l — орбитального, m_l — магнитного, m_s — магнитного спинового.

 Максимальное число электронов $Z(n)$, находящихся в состояниях, определяемых данным главным квантовым числом n,

$$Z(n) = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2.$$

 Коротковолновая граница сплошного рентгеновского спектра

$$\lambda_{\min} = ch/(eU),$$

где e — заряд электрона; U — разность потенциалов, приложенная к рентгеновской трубке.

 Закон Мозли, определяющий частоты спектральных линий характеристического рентгеновского излучения,

$$\nu = R(Z-\sigma)^2\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

где R — постоянная Ридберга, Z — порядковый номер элемента в периодической системе; σ — постоянная экранирования; m определяет рентгеновскую серию ($m = 1, 2, 3, ...$); n определяет отдельные линии соответствующей серии ($n = m + 1, m + 2, ...$).

 Закон Мозли для линии K_α ($\sigma = 1$)

$$\nu = R(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right).$$

6.4. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКИ

 Распределение Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака

$$\langle N_i\rangle = \frac{1}{e^{(E_i-\mu)/(kT)} - 1} \text{ и } \langle N_i\rangle = \frac{1}{e^{(E_i-\mu)/(kT)} + 1},$$

где $\langle N_i \rangle$ — соответственно средние числа бозонов и фермионов в квантовом состоянии с энергией E_i; k — постоянная Больцмана; T — термодинамическая температура; μ — химический потенциал. При $e^{(E_i-\mu)/(kT)} >> 1$ оба распределения переходят в классическое распределение Максвелла-Больцмана $\langle N_i \rangle = Ae^{-E_i/(kT)}$, где $A = e^{\mu/(kT)}$.

□ Распределение Ферми-Дирака по энергиям для свободных электронов в металле

$$\langle N(E) \rangle = \frac{1}{e^{(E-E_\mathrm{F})/(kT)}+1},$$

где E_F — энергия Ферми.

- При $T = 0$ К

$$\langle N(E) \rangle = \begin{cases} 1 & \text{при } E < F_\mathrm{F}, \\ 0 & \text{при } E > F_\mathrm{F}. \end{cases}$$

□ Характеристическая температура Дебая (при $T << T_\mathrm{D}$)

$$T_\mathrm{D} = \hbar\omega_\mathrm{D} / k,$$

□ Электрическая проводимость металла, согласно квантовой теории электропроводности металлов,

$$\gamma = \frac{ne^2 \langle l_\mathrm{F} \rangle}{m \langle u_\mathrm{F} \rangle},$$

где n — концентрация электронов проводимости в металле; $\langle l_\mathrm{F} \rangle$ — средняя длина свободного пробега электрона, имеющего энергию Ферми; $\langle u_\mathrm{F} \rangle$ — средняя скорость теплового движения такого электрона.

6.5. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

$$n_e = C_1\, e^{-(E_2-E_\mathrm{F})/(kT)} \text{ и } n_p = C_2\, e^{-(E_1-E_\mathrm{F})/(kT)},$$

где E_2 — энергия, соответствующая дну зоны проводимости; E_1 — энергия, соответствующая верхней границе валентной зоны; E_F — энергия Ферми; T — термодинамическая температура; C_1 и C_2 — постоянные, зависящие от температуры и эффективных масс электронов проводимости и дырок (при равенстве последних $C_1 = C_2$).

□ Уровень Ферми в собственном полупроводнике

$$E_\mathrm{F} = \Delta E / 2.$$

где ΔE — ширина запрещенной зоны.

□ Удельная проводимость собственных полупроводников

$$\gamma = \gamma_0\, e^{-\Delta E/(2kT)},$$

где γ_0 — постоянная, характерная для данного полупроводника.

VII. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ АТОМНОГО ЯДРА

7.1. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ АТОМНОГО ЯДРА

- Радиус ядра

$$R = R_0 A^{1/3},$$

где $R_0 = 1{,}4 \cdot 10^{-15}$ м; A — массовое число (число нуклонов в ядре).

- Энергия связи нуклонов в ядре

$$E_{\text{св}} = \left[Zm_p + (A - Z)m_n - m_я\right]c^2 = \left[Zm_{\text{H}} + (A - Z)m_n - m\right]c^2,$$

где m_p, m_n, $m_я$ — соответственно массы протона, нейтрона и ядра; Z — зарядовое число ядра (число протонов в ядре); A — массовое число; $m_{\text{H}} = m_p + m_e$, масса атома водорода $\left({}_1^1\text{H}\right)$; m — масса атома.

- Дефект массы ядра

$$\Delta m = \left[Zm_p + (A - Z)m_n\right] - m_я = \left[Zm_{\text{H}} + (A - Z)m_n\right] - m.$$

- Удельная энергия связи (энергия связи, отнесенная к одному нук- лону)

$$\delta E_{\text{св}} = E_{\text{св}} / A.$$

- Число ядер, распавшихся в среднем за промежуток времени от t до $t + \mathrm{d}t$,

$$\mathrm{d}N = -\lambda N \mathrm{d}t,$$

где N — число нераспавшихся ядер к моменту времени t; λ — постоянная радиоактивного распада.

- Закон радиоактивного распада

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

где N — число нераспавшихся ядер в момент времени t; N_0 — начальное число нераспавшихся ядер (в момент времени $t = 0$); λ — постоянная радиоактивного распада.

- Число ядер, распавшихся за время t,

$$\Delta N = N_0 - N = N_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right)$$

- Связь периода полураспада $T_{1/2}$ и постоянной радиоактивного рас- пада λ

$$T_{1/2} = (\ln 2)/\lambda.$$

- Связь среднего времени жизни τ радиоактивного ядра и постоянной λ радиоактивного распада

$$\tau = 1/\lambda.$$

- Активность нуклида

$$A = \left|\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right| = \lambda N.$$

- Правила смещения:

- для α-распада

$$^{A}_{Z}\mathrm{X} \to ^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y} + ^{4}_{2}\mathrm{He}\,;$$

- для β^{-}-распада

$$^{A}_{Z}\mathrm{X} \to ^{A}_{Z+1}\mathrm{Y} + ^{0}_{-1}\mathrm{e}\,;$$

- для β^{+}-распада

$$^{A}_{Z}\mathrm{X} \to ^{A}_{Z-1}\mathrm{Y} + ^{0}_{+1}\mathrm{e}\,.$$

- Символическая запись ядерной реакции

$$^{A}_{Z}\mathrm{X} + a \to ^{A'}_{Z'}\mathrm{Y} + b, \text{ или } ^{A}_{Z}\mathrm{X}(a,\, b)^{A'}_{Z'}\mathrm{Y},$$

где $^{A}_{Z}\mathrm{X}$ и $^{A'}_{Z'}\mathrm{Y}$ — исходное и конечное ядра соответственно с зарядовыми числами Z и Z' и массовыми числами A и A', a и $Ь$ — соответственно бомбардирующая и испускаемая (или испускаемые) в ядерной реакции частицы.

- Энергия ядерной реакции

$$Q = c^2\left[(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)\right],$$

где m_1 и m_2 — массы покоя ядра-мишени и бомбардирующей частицы; (m_3+m_4) — суммы масс покоя ядер продуктов реакции. Если $Q > 0$ — экзотермическая реакция, $Q < 0$ — эндотермическая реакция.

- Энергия ядерной реакции представляется также в виде

$$Q = (T_1 + T_2) - (T_3 + T_4),$$

где T_1, T_2, T_3, T_4 — соответственно кинетические энергии ядра-мишени, бомбардирующей частицы, испускаемой частицы и ядра продукта реакции.

- Скорость нарастания цепной реакции

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \frac{N(k-1)}{T}, \text{ откуда } N = N_0 \mathrm{e}^{(k-1)t/T},$$

где N_0 — число нейтронов в начальный момент времени; N — число нейтронов в момент времени t; T — среднее время жизни одного поколения; k — коэффициент размножения нейтронов.

Приложения

Основные физические постоянные (округленные значения)

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Нормальное ускорение свободного падения	g	9,81 м/с^2
Гравитационная постоянная	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг$\cdot$с^2)
Постоянная Авогадро	N_A	$6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Постоянная Фарадея	F	$96{,}48 \cdot 10^{3}$ Кл/моль
Молярная газовая	R	8,31 Дж/(моль

постоянная		
Молярный объем идеального газа при нормальных условиях	V_m	$22,4 \cdot 10^{-3}$ м^3/моль
Постоянная Больцмана	k	$1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Скорость света в вакууме	c	$3,00 \cdot 10^8$ м/с
Постоянная Стефана-Больцмана	σ	$5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м$^2 \cdot$К^4)
Постоянная закона смещения Вина	b	$2,90 \cdot 10^{-3}$ м$\cdot$К
Постоянная Планка	h $\hbar = h/2\pi$	$6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж$\cdot$с $1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж$\cdot$с
Постоянная Ридберга	R	$1,10 \cdot 10^7$ м$^{-1}$
Радиус Бора	a	$0,529 \cdot 10^{-10}$ м
Масса покоя электрона	m_e	$9,11 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	m_p	$1,6726 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя нейтрона	m_n	$1,6750 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя α-частицы	m_α	$6,6425 \cdot 10^{-27}$ кг
Атомная единица массы	а.е.м.	$1,660 \cdot 10^{-27}$ кг
Отношение массы протона к массе электрона	m_p/m_e	1836,15
Элементарный заряд	e	$1,60 \cdot 10^{-19}$ Кл
Отношение заряда электрона к его массе	e/m_e	$1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
Комптоновская длина волны электрона	Λ	$2,43 \cdot 10^{-12}$ м
Энергия ионизации атома водорода	E_i	$2,18 \cdot 10^{-18}$ Дж (13,6 эВ)
Магнетон Бора	μ_B	$0,927 \cdot 10^{-23}$ А$\cdot$м^2
Электрическая постоянная	ε_0	$8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная	μ_0	$12,566 \cdot 10^{-7}$ Гн/м

Единицы и размерности физических величин в СИ

Величина		Единица		Выражение через основные и дополнитель-ные единицы
наименование	размерность	наиме-нование	обозна-чение	
Основные единицы				
Длина	***L***	метр	м	
Масса	***M***	килограмм	кг	
Время	***T***	секунда	с	

Сила электрического тока	$\boldsymbol{I}$	ампер	А	
Термодинамическая температура	Θ	кельвин	К	
Количество вещества	$\boldsymbol{N}$	моль	моль	
Сила света	$\boldsymbol{J}$	кандела	кд	
Дополнительные единицы				
Плоский угол	—	радиан	рад	
Телесный угол	—	стерадиан	ср	
Производные единицы				
Частота	T^{-1}	герц	Гц	$с^{-1}$
Сила, вес	LMT^{-2}	ньютон	Н	$м \cdot кг \cdot с^{-2}$
Давление, механическое напряжение	$L^{-1}MT^{-2}$	паскаль	Па	$м^{-1} \cdot кг \cdot с^{-2}$
Энергия, работа, количество теплоты	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж	$м^2 \cdot кг \cdot с^{-2}$
Мощность, поток энергии	L^2MT^{-3}	ватт	Вт	$м^2 \cdot кг \cdot с^{-3}$
Количество электричества (электрический заряд)	TI	кулон	Кл	$с \cdot А$
Электрическое напряжение, электрический потенциал, разность электрических потенциалов, электродвижущая сила	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	вольт	В	$м^2 \cdot кг \cdot с^{-3} \cdot А^{-1}$
Электрическая емкость	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	фарад	Ф	$м^{-2} \cdot кг^{-1} \cdot с^4 \cdot А^2$
Электрическое сопротивление	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	ом	Ом	$м^2 \cdot кг \cdot с^{-3} \cdot А^{-2}$
Электрическая проводимость	$L^{-2}M^{-1}T^3I^2$	сименс	См	$м^{-2} \cdot кг^{-1} \cdot с^3 \cdot А^2$
Магнитный поток	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	вебер	Вб	$м^2 \cdot кг \cdot с^{-2} \cdot А^{-1}$
Магнитная индукция	$MT^{-2}I^{-1}$	тесла	Тл	$кг \cdot с^{-2} \cdot А^{-1}$
Индуктивность, взаимная индуктивность	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	генри	Гн	$м^2 \cdot кг \cdot с^{-2} \cdot А^{-2}$
Световой поток	J	люмен	лм	$кд \cdot ср$
Освещенность	$L^{-2}J$	люкс	лк	$м^{-2} \cdot кд \cdot ср$
Активность изотопа (активность нуклида в радиоактивном источнике)	T^{-1}	беккерель	Бк	$с^{-1}$

Поглощенная доза излучения	$L^{-2}T^{-2}$	грей	Гр	$\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$

Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц

Множитель	Приставка	Обозначение приставки		Множитель	Приставка	Обозначение приставки	
		международное	русское			международное	русское
10^{-18}	атто	a	а	10^{1}	дека	da	да
10^{-15}	фемто	f	ф	10^{2}	гекто	h	г
10^{-12}	пико	p	п	10^{3}	кило	k	к
10^{-9}	нано	n	н	10^{6}	мега	M	М
10^{-6}	микро	μ	мк	10^{9}	гига	G	Г
10^{-3}	милли	m	м	10^{12}	тера	T	Т
10^{-2}	санти	c	с	10^{15}	пета	P	П
10^{-1}	деци	d	д	10^{18}	экса	E	Э

Греческий алфавит

Обозначения букв	Название букв	Обозначения букв	Название букв
Α, α	альфа	Ν, ν	ню
Β, β	бета	Ξ, ξ	кси
Γ, γ	гамма	Ο, ο	омикрон
Δ, δ	дельта	Π, π	пи
Ε, ε	эпсилон	Ρ, ρ	ро
Ζ, ζ	дзета	Σ, σ	сигма
Η, η	эта	Τ, τ	тау
Θ, θ, ϑ	тета	Υ, υ	ипсилон
Ι, ι	йота	Φ, ϕ	фи
Κ, κ	каппа	Χ, χ	хи
Λ, λ	ламбда	Ψ, ψ	пси
Μ, μ	мю	Ω, ω	омега

СОДЕРЖАНИЕ